Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Martín Enrique Guerra Cáceres

Resumen

El objetivo de este artículo es explorar con qué habilidades y/o conocimientos se quedan los estudiantes una vez que han concluido un curso tradicional de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y, asimismo, proporcionar argumentos a favor de una nueva perspectiva metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina. En este sentido, se aplica una metodología de investigación cualitativa y se utiliza la noción de Esquema en el marco de la teoría APOS para describir y analizar las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que demandan dibujar las gráficas de las soluciones de algunos problemas de valor inicial. Así, los esquemas del concepto de ecuación diferencial se caracterizan por el predominio de estrategias algebraicas y algorítmicas, presencia de concepciones de acción y de proceso de los conceptos básicos del cálculo y de las ecuaciones diferenciales y, en consecuencia, ausencia de conocimientos y/o habilidades metacognitivas.

Presentación

En las últimas dos décadas se han escrito algunos trabajos de investigación y de innovación curricular del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) (Artigue, 1989, 1992; Arrowsmith, 1991; Blanchard, 1994; Blanchard, Devaney y Hall, 1999; Devaney, 1995; Hernández, 1994; Hubbard y West, 1991), entre otros, en los que, haciendo un uso intensivo de la tecnología, se promueve la articulación de los diferentes sistemas de representación semiótica: algebraico, gráfico y numérico. Evidentemente, esta perspectiva se debe a las razones fundamentales siguientes:

- La posibilidad de realizar en un primer curso un estudio acorde con la epistemología de las EDO, conjugando los aspectos cuantitativos y cualitativos y los procesos de modelación matemática.
- La posibilidad de contar en la clase de matemáticas con poderosas herramientas gráficas y computacionales para representar y transformar el contenido matemático y promover ambientes de aprendizaje interactivos.
- La convicción de que el conocimiento matemático es como el invariante de múltiples representaciones y que, por tanto, llegar a comprender un concepto matemático implica ser flexible en los procesos de conversión entre diferentes sistemas de representación (Artigue, 1992; Dreyfus, 1994; Duval, 1993).
- Los resultados de muchas investigaciones didácticas, por ejemplo, (Cooley y Trigueros, 2000; Ferrini-Mundi y Graham, 1994; Hauk, Mason, Selden y Selden, 1999) que señalan que limitar el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo al registro algebraico y algorítmico no garantiza la comprensión de los conceptos básicos y que, por el contrario, se generan en los estudiantes esquemas y habilidades demasiado rígidas, así como capacidades muy pobres para transferir sus conocimientos más allá del contexto en el cual éstos se adquirieron, impidiéndose así

su progreso hacia niveles superiores de pensamiento.

Sin embargo, en muchos sistemas didácticos en el nivel universitario, tal como sucede en el caso de El Salvador, por diversas causas, el primer curso de EDO pervive aún exclusivamente como la continuación algebraica y algorítmica del cálculo diferencial e integral, marginando los aspectos gráficos y numéricos y el estudio del comportamiento de las soluciones (ver Guerra, 2002). Se olvida así el hecho de que en el momento que los estudiantes llegan a este curso poseen ya unos ciertos conocimientos y/o habilidades gráficas necesarias, aunque no suficientes, para resolver una EDO mediante métodos cualitativos elementales, es decir, derivando directamente de la EDO las propiedades necesarias para dibujar la gráfica de la solución y estudiar su comportamiento, sin necesidad de contar con una fórmula para dicha solución. Por otra parte, se ignoran las evidencias empíricas que señalan que aquellos estudiantes que son competentes en el registro gráfico/geométrico, sacan mejor provecho de ambientes de aprendizaje que usan las nuevas tecnologías. Por ejemplo, Chau & Pluvinage (1999) reportan que universitarios de primer año que tienen éxito en las tareas cualitativas de las ecuaciones diferenciales ordinarias sacan mejor provecho del trabajo gráfico utilizando Derive que los alumnos que trabajan bien la parte algebraica. Y agregan, que si bien es cierto que, los métodos cualitativos se adquieren más difícilmente, presentan, desde el punto de vista didáctico, el interés de favorecer la transferencia de conocimientos.

Entre las causas a tener en cuenta, que hacen que la práctica educativa en este campo aún permanezca impermeable a los resultados de la investigación didáctica y de las innovaciones curriculares y siga anquilosada en el enfoque algebraico y algorítmico, juegan un papel determinante las siguientes (ver Artigue, 1992,1995): en el plano epistemológico, el largo predominio del enfoque algebraico, la creencia generalizada entre el profesorado en la superioridad de éste frente al enfoque gráfico y numérico, el cual se le considera secundario y subsidiario. De hecho, los estudios de (Eisenberg, 1991; Moreno, 1997, 2000) constatan que en la práctica docente existe el predominio, por lo general implícito, de una concepción epistemológica de las matemáticas que, por una parte, sobre valora la manipulación lógica, simbólica y analítica y, por otra, desprecia los aspectos gráficos y visuales, considerándolos como no matemáticos. Estos últimos son considerados sólo como cierto soporte heurístico, un mero "auxiliar didáctico" para presentar los conceptos matemáticos y sus interrelaciones, pero una vez que han sido usados estos deben ser retirados de la urdimbre conceptual. En el plano cognitivo, las dificultades relacionadas al hecho de que la resolución cualitativa requiere el uso y razonamiento con funciones que no se expresan explícitamente, el uso coordinado y simultáneo de los registros algebraicos y gráficos, tanto para una función como para sus derivadas, y el hecho de que las pruebas en la aproximación numérica y cualitativa requieren un manejo sofisticado y apropiado del cálculo elemental. En el plano didáctico, lo atractivo de los algoritmos y la imposibilidad de crear algoritmos en la aproximación cualitativa, el rechazo de los problemas que no pueden ser resueltos completamente y el hecho de que en las nuevas propuestas se asuma como imprescindible hacer un uso intensivo de la tecnología.

Por tanto, este trabajo pretende ser el punto de inicio de un trabajo más amplio en el que se estudia el pensamiento de los estudiantes en el marco de una enseñanza en la que se integran las diferentes representaciones semióticas, los aspectos fenomenológicos conectados a los conceptos implicados y, en la medida de lo posible, la tecnología (de manera racional y adecuada). En este sentido, el objetivo de este artículo es presentar información relevante sobre los esquemas del concepto de EDO que se generan en los estudiantes que siguen un programa tradicional, como paso previo para avanzar en nuestro proyecto más global.

Marco Teórico

Este trabajo se ubica dentro del programa de investigación neopiagetiano denominado Teoría APOS (*Actions, Process, Objects, Schemas*), con el objeto de describir y explicar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado en el nivel universitario (Dubinsky, 1991, 1996; DeVries, 2001). El concepto central de la teoría es el de *abstracción reflexiva,* proceso cognitivo complejo por medio del cual el conocimiento individual es el resultado de la coordinación de acciones interiorizadas que tienen su origen en las acciones (experiencias físicas o lógico-matemáticas) que el sujeto realiza sobre los objetos, ya sean físicos o mentales. Otros dos tipos de abstracción que están conectados a la abstracción reflexiva son: l*a abstracción empírica,* que partiendo de su actuación sobre los objetos del mundo el sujeto deriva conocimiento del descubrimiento de las propiedades de los objetos que ya tenían antes de actuar sobre ellos. *La abstracción pseudo-empírica,* deriva conocimiento no de los objetos mismos sino de las acciones que el sujeto aplica a dichos objetos (Dubinsky, 1991). Estas tres clases de abstracción no son independientes entre sí. Las acciones que conllevan a la abstracción pseudo-empírica o a la reflexiva son realizadas sobre objetos cuyas propiedades, el sujeto sólo llega a conocer a través de la abstracción empírica. Por otro lado, la abstracción empírica se posibilita gracias a esquemas de asimilación[1] que fueron construidos por la abstracción reflexiva. Esta interdependencia puede resumirse de la siguiente manera: la abstracción empírica y pseudo-empírica derivan conocimiento de los objetos realizando (o imaginando) acciones sobre éstos. La abstracción reflexiva interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas acciones y, por último, nuevos objetos (que pueden no ser físicos, sino matemáticos como una función o un grupo). La abstracción empírica extrae datos de estos nuevos objetos a través de acciones mentales sobre estos objetos, y así progresivamente se van construyendo las entidades matemáticas en la mente del sujeto hasta llegar a ser plasmadas en teorías axiomáticas. En esta dinámica también puede apreciarse ese mecanismo más general que se encuentra tanto en la psicogénesis como en la historia del pensamiento matemático, la triada dialéctica que conduce de lo intra-objetal o análisis de los objetos, a lo inter-objetal, es decir, al estudio de las relaciones y transformaciones entre dichos objetos, y de allí a lo trans-objetal o estudio de las estructuras construidas tomando como soporte dichas transformaciones (Piaget y Garcia, 1983). Dubinsky (1991, pp. 101-102) propone los siguientes cinco mecanismos principales que están presentes en la consecución de la abstracción reflexiva y que considera son sumamente importantes para el Pensamiento Matemático Avanzado: a) *la interiorización*, que consiste en trasladar una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizadas, b) *la coordinación,* composición de dos o más procesos para construir otro nuevo, c) *la encapsulación*, esto es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático) o la tematización de un esquema d) *la generalización,* la extensión del dominio de aplicación de los esquemas construidos y e) *la reversión*, construcción de un nuevo proceso que consiste en revertir un proceso ya construido internamente (*desencapsular o destematizar*). En la teoría APOS, la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos (físicos o mentales) ya construidos para

[1] Para Piaget el proceso de desarrollo cognitivo se basa en dos mecanismos o procesos: la organización y la adaptación. El proceso de adaptación es considerado como el equilibrio entre los procesos de asimilación y de acomodación. La asimilación permite al sujeto incorporar los objetos a su estructura cognoscitiva, a sus esquemas previos en un proceso activo mediante el cual el sujeto transforma la realidad a la cual se adapta. La acomodación es el proceso inverso por el cual el sujeto transforma su estructura cognoscitiva, sus esquemas, para poder incorporar los objetos de la realidad.

formar *acciones*; las acciones son entonces interiorizadas para formar *procesos* los cuales, a su vez, son encapsulados para formar *objetos*. Los objetos pueden ser desencapsulados para volver a los procesos de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en *esquemas*. Así tenemos al menos dos formas de construir objetos: a partir de procesos y de esquemas. Estos objetos pueden ser transformados por acciones de nivel superior que conllevan a otros procesos, objetos y esquemas nuevos. Por tanto, tenemos un mecanismo que puede ser visto como una espiral ascendente de acciones, procesos y objetos dentro de esquemas que se reconstruyen y enriquecen.

En (Asiala y col. ,1997; Dubinsky, 1996; DeVries, 2001) encontramos las siguientes definiciones de los términos acción, proceso, objeto y esquema y de las respectivas concepciones:

Acción/Concepción de acción. Una *acción* es una transformación, ya sea mental o física, de un objeto que la persona percibe como algo que es hasta cierto punto externo. La transformación se realiza reaccionando a indicaciones externas precisas de los pasos a seguir. Una persona está en una *concepción de acción de una transformación* si su nivel de comprensión está limitado sólo a realizar las acciones que supone dicha transformación. Aquí la acción tiende a controlar a la persona. Es importante señalar que una persona con una comprensión profunda de una transformación también puede llegar realizar una acción si así lo considera apropiado, sin estar supeditado a ella.

Proceso/Concepción de proceso. Cuando una acción se repite y la persona reflexiona sobre ella, entonces puede ser interiorizada en un proceso. Esto es, se puede hacer una construcción interna que realiza la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Una persona que ha construido un proceso puede reflexionar, describir, o incluso revertir, todos los pasos del proceso sin llegar a realizarlos en realidad. En contraste a una acción, un proceso es percibido como algo interno y bajo el control consciente de la persona. Una persona está o tiene una concepción de proceso de una transformación si su nivel de comprensión está limitado a pensar la transformación como un proceso.

Objeto/Concepción de Objeto. Una persona puede construir objetos cognitivos de dos maneras. Primero, cuando esa persona reflexiona sobre las acciones aplicadas a procesos particulares, se vuelve consciente del proceso como una totalidad, se da cuenta de las transformaciones (ya sean, acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y es capaz de construir tales transformaciones, entonces se dice que la persona ha construido este proceso como un objeto cognitivo. En este caso, se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Segundo, cuando reflexiona sobre un esquema, se vuelve consciente del esquema como una totalidad y es capaz de realizar acciones sobre él, se dice que la persona ha tematizado el esquema en un objeto. Una persona tiene una concepción de objeto de un concepto matemático cuando su nivel de comprensión de esa idea o concepto le permite tratarla como un objeto: es capaz de realizar acciones, de desencapsular el objeto para volver al proceso del cual se obtuvo (con el fin de usar sus propiedades y manipularlo) o en el caso de un esquema tematizado, destematizarlo en sus diversas componentes. En general, se considera que la operación de encapsular procesos en objetos es sumamente difícil. De hecho, esta es un área que demanda más experimentación (Dubinsky, 1996).

Esquema. Una vez construidos los objetos y los procesos, estos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados; procesos y objetos se pueden relacionar por el hecho de que el primero actúa sobre el segundo. Así un esquema para cierta parcela de las matemáticas es una colección personal de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están conectados, consciente o inconscientemente, en una "estructura coherente" en la mente de la persona. Los mismos esquemas pueden ser tratados como objetos (tematización de un esquema) y formar parte de un esquema de nivel superior.

Respecto a la naturaleza del desarrollo de los esquemas resulta que éstos puede describirse a través de ciertos *niveles o estadios* que ocurren en un orden específico: *intra nivel→ inter nivel→ trans nivel* (Clark *et al*, 1997; DeVries, 2001). Por ejemplo, en un esquema de la geometría estos niveles podrían llamarse: *intrafigural, interfigural, transfigural*. Y en un esquema analítico: *intraoperacional, interoperacional, transoperacional*. La existencia de estos estadios, uno de los principios fundamentales de la epistemología genética, expresa que el desarrollo del sistema cognoscitivo no es ni un crecimiento continuo, ni un proceso lineal[2]. "*[Esta progresión] no consiste en simples rebasamientos, puramente lineales, tales como los encontrados en toda sucesión dialéctica elemental, sino que es necesario referirse a un rebasamiento continuo de los instrumentos mismos de rebasamiento, lo cual le confiere a los instrumentos cognoscitivos su riqueza y complejidad particular. [...]Cada estadio no puede ser concebido como un crecimiento natural a partir del estadio precedente, puesto que consiste en una reorganización de la totalidad de los instrumentos anteriormente utilizados por el sujeto*" (Piaget y García, 1983). En (DeVries, 2001) encontramos las definiciones siguientes:

Intra nivel de un esquema: se caracteriza por centrarse en aspectos o características individuales de los objetos, aisladas de otras acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. La persona aún no ha construido ninguna relación entre ellos, y menos aun estructuras.

Inter nivel de un esquema: se caracteriza por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel una persona comienza a agrupar aspectos o características de naturaleza similar y tal vez pueda denominarlas por un mismo nombre. En Clark *et al.*(1997, p. 360) se llama a este nivel *pre-esquema*: colección de elementos relacionados de alguna manera.

Trans nivel de un esquema: se caracteriza porque la persona ha construido una estructura subyacente que permite entender las relaciones descubiertas en el inter nivel y que a la vez da coherencia al esquema. Esta coherencia determina lo que está o no al alcance del esquema. En este nivel, la comprensión pasa de una lista a una regla general. Y se habla de tematizar un esquema sólo después de que se haya alcanzado el trans nivel.

Ahora bien, la práctica educativa nos dice que es posible que en un esquema coexistan, inconsciente o conscientemente, ideas inconsistentes (considerar compatible una proposición y su negación), incoherentes (respuestas en diferentes sistemas de representación contradictorias entre sí), pobres y conflictivas. Tall y Vinner (1981), proponen las nociones de "*concept image*" y "*concept definition*" para referirse y explicar los conflictos que existen entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos individuales utilizados para concebirlos. Estos fenómenos pueden ser debidos a desajustes en la realización de los procesos del ciclo APOS o porque el proceso de estudio implementado es pobre, por

[2] El sistema cognoscitivo se considera como un sistema abierto cuya dinámica está determinada en gran medida por los intercambios con el medio. Su evolución se caracteriza por períodos de equilibrio dinámico o de equilibración (estadios), seguidos de rupturas de equilibrio (desequilibración) y de reorganizaciones (reequilibración) que conduce al sistema a nuevas condiciones estacionarias (nuevo estadio). Así pues, los estadios son períodos de estabilidad relativa que involucran todo tipo de fluctuaciones que surgen de las situaciones cambiantes con las cuales está confrontado permanentemente el sujeto. Y la transición de un estadio cognoscitivo al siguiente es un ejemplo típico de la inestabilidad de un sistema que no logra ya absorber ciertas perturbaciones (contradicciones internas, incapacidad de resolver ciertos problemas, etc) y debe por lo tanto reorganizar los instrumentos asimiladores para incorporar nuevas situaciones.

ejemplo, no se toma en cuenta la complejidad de los conceptos matemáticos implicados o no se ponen en juego las diferentes representaciones semióticas. En este sentido, es mejor pensar en términos de una versión débil o instrumental de un trans nivel: observar cómo la persona decide lo que está dentro y lo que está fuera del esquema. Evidentemente, esto conduce a esquemas tematizados que no siempre funcionan de la mejor manera posible. En consecuencia, para ensanchar los límites de competencia de los estudiantes, estos esquemas deben ser detectados, corregidos y enriquecidos. Así, el esquema tiene que ser desequilibrado y reconstruido. En (Clark *et al*., 1997; DeVries, 2001) se usa la etiqueta "*madurez del esquema*" para referirse a la fuerza o potencia de un esquema y hacen una analogía con el concepto de función. Si el proceso de construcción se reduce al registro algebraico y si éste es el proceso que es encapsulado en un objeto, entonces el estudiante acaba con una concepción de función débil. Aquí la causa no es el fracaso del proceso de encapsulación, sino la encapsulación de un proceso que no era lo suficientemente rico. De igual manera, una persona puede tematizar un esquema que tiene una estructura coherente débil y, en consecuencia, está persona puede no ser capaz de aplicar ese esquema en situaciones nuevas. Así pues, el esquema de una persona es la totalidad de conocimiento que para él o ella está conectado (consciente o inconscientemente) a un tema matemático particular. Una persona tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, un esquema de grupo, etc. El esquema de una persona también puede incluir una colección de experiencias, impresiones, imágenes o expresiones verbales tales como "*Cada vez que veo este símbolo yo hago esto*". Y se puede hablar, en consecuencia, de esquemas pobres, débiles, incoherentes y rígidos.

Metodología y Contexto de la investigación

En este trabajo se describen, analizan, interpretan y caracterizan las producciones de los estudiantes en torno al concepto de solución de una EDO. La investigación se lleva a cabo en el contexto del sistema universitario salvadoreño. La revisión de los diferentes programas de estudio y de los libros de texto utilizados (Zill, 1988; Boyce y Di Prima, 1986; Coddington y Levinson, 1955) permite caracterizar el currículo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) como un currículo tradicional que privilegia los procesos de algebrización y algoritmización asociados al estudio de un conjunto de métodos (separación de variables, series, Tranfomada de Laplace, etc) para encontrar fórmulas para las soluciones de ciertos tipos de EDO, en los que se dejan en segundo plano cuestiones centrales acerca del comportamiento de dichas soluciones; métodos que eran ya bien conocidos hacia 1740 y que, desde los tiempos de Euler o Cauchy, son pocos los cambios que se han realizado en los contenidos, el lenguaje y su tratamiento (Kline, 1992; Rota, 1997). La enseñanza, en consecuencia, es una enseñanza tradicional centrada en una práctica algebraica y algorítmica, que en muchos casos se reduce a meras "recetas de cocina", donde las guías de ejercicios regulan la actividad del estudiante y en la que se evalúa sólo las competencias adquiridas en este dominio. Asimismo, los nexos entre matemáticas y ciencias son muy pobres y se hace un uso nulo o inadecuado de las herramientas gráficas y computacionales (Campillo y Devesa, 1999). Respecto al aprendizaje, se observan altos porcentajes de reprobados, desanimo de los estudiantes, competencias muy pobres y una comprensión cuestionable de los conceptos y métodos matemáticos implicados de muchos de los que aprueban: ¿Con qué se quedan los estudiantes una vez superado el curso tradicional? ¿Qué competencias han adquirido? ¿Cuáles se suponen que deberían haber adquirido? ¿Qué papel juega el predominio de una práctica algebraica y algorítmica en la conceptualización de las nociones de las EDO? son cuestiones que no se investigan ni preocupan. Por tanto, puede afirmarse que en el proceso de enseñanza y aprendizaje subsisten unos ciertos niveles de exigencias mínimos tanto para los profesores como para los alumnos y un control absoluto del proceso por parte del profesor. Artigue señala que esta es la respuesta más fácil que los sistemas didácticos ofrecen frente a las grandes dificultades de comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes: *"frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en un circulo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa"(Artigue, 1995, p. 97).*

En este sentido, la metodología utilizada tiene una orientación cualitativa y se llevó a cabo realizando un estudio de casos: 4 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de El Salvador que cursaron la asignatura Ecuaciones Diferenciales I durante 18 semanas entre los meses de febrero y junio de 2000.

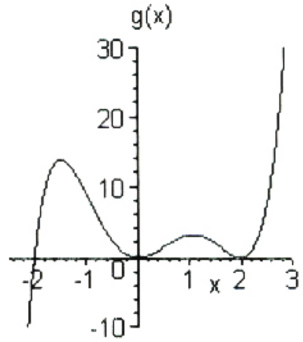
La información se obtuvo a principios de enero de 2001 de las respuestas que los estudiantes dieron a un cuestionario y de entrevistas individuales grabadas en audio. Primero, administramos el cuestionario y analizamos las respuestas obtenidas. Una semana después, durante cuatro días, realizamos las entrevistas con el objeto de profundizar en el pensamiento de los estudiantes ante las respuestas dadas en el cuestionario e intentar resolver los problemas que no fueron resueltos o cuyas respuestas eran muy pobres. La renuencia de los sujetos para utilizar los métodos cualitativos elementales y los bloqueos continuos, a veces muy prolongados, que experimentaron durante las sesiones de entrevistas, nos condujeron a inducir su trabajo. Esta influencia no ha sido estudiada y, por tanto, aparece como una debilidad metodológica de este trabajo.

El cuestionario consta de los cuatro problemas siguientes que pueden resolverse con lápiz y papel y que demandan de los estudiantes relacionar los registros algebraico y gráfico, así como hacer uso de sus habilidades y conocimientos del cálculo y de los resultados de existencia y unicidad de las EDO. El tiempo estimado para responder el cuestionario fue de 2 horas.

1. Considera la ecuación diferencial dada por $\frac{dy}{dx} = x^2(x-2)^2(x+2)$.

Bosqueja la gráfica de la curva solución que pasa por el punto $(0,1)$.

2. Considera la ecuación diferencial dada por $\frac{dy}{dx} = g(x)$, donde $g(x)$ es la función representada en la figura siguiente



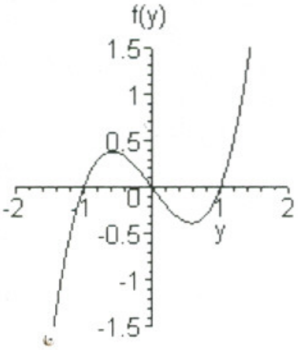
Bosqueja la gráfica de la solución que pasa por el punto $(0,-1)$.

3. Considera la siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = sen(y(t))$.

   3.1 Bosqueja la gráfica de la solución que pasa por el punto $(0,\frac{\pi}{2})$.

   3.2 Encuentra $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

4. Considera la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(y)$, donde $f(y)$ está dada en la figura de abajo.



4.1 Bosqueja la gráfica de la solución que pasa por el punto $(0, \frac{1}{2})$.

Encuentra $\lim_{t \to \infty} y(t)$.

Análisis de Datos y Caracterización de los Esquemas

Para describir y analizar las producciones de los estudiantes a las tareas propuestas, nos preguntamos: ¿Qué estrategias se utilizan para dibujar la gráfica de una solución de una EDO? ¿Cuáles son las dificultades encontradas? ¿Son los estudiantes capaces de construir la gráfica de una solución derivando las propiedades necesarias de dicha solución directamente de la EDO o, por el contrario, primero sienten la necesidad de encontrar una fórmula para dicha solución y posteriormente intentan dibujar su gráfica? Los resultados obtenidos son reveladores:

En las respuestas dadas en los cuestionarios, todos los estudiantes muestran claramente una tendencia dominante, en la cual no se toma en cuenta sí la información relevante contenida en el lado derecho de la EDO está dada o bien en el registro algebraico o bien en el gráfico. A saber: primero encontrar una fórmula para la solución de la EDO utilizando el método de separación de variables y luego intentar dibujar la gráfica de dicha solución utilizando las técnicas escolares del cálculo diferencial. Así, ninguno fue capaz de resolver eficientemente las tareas propuestas, es decir, discriminar las propiedades relevantes de la gráfica de la solución y coordinarlas con la información que proporciona la ecuación diferencial para dibujar dicha gráfica. Tampoco, ninguno se dio cuenta que la estrategia en cuestión es circular puesto que la primera derivada ya está dada en la EDO o porque la estrategia podría ser poco fructífera debido a que la fórmula obtenida podría resultar ser poco práctica para poder reproducir eficientemente los esquemas previos del cálculo, así como de la equivalencia de los problemas 1 y 2 y los problemas 3 y 4 respectivamente. De hecho, en las respuestas del cuestionario a los problemas 2 y 4, dos estudiantes intentan integrar formalmente ($dy = g(x)dx$ ó $\frac{dy}{f(y)} = dt$) y dos no hacen nada, ignorando, en ambos casos, completamente la grafica del lado derecho de la EDO. En el problema 1, dos estudiantes obtienen la solución correcta $y = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{5}x^5 - x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 1$, pero no intentan graficarla ni dan señales de que hayan intentado utilizar sus conocimientos del cálculo. Esto último se confirma en los dos segmentos de las entrevistas siguientes:

I: ¿Cómo graficaría esta función? o ¿cómo haría la gráfica?.

E1: Se mete esto en el Derive y… (risas).

I: Exactamente, pero si no existiera el Derive, ¿cómo lo haría?

E1: Si no existiera el Derive, le damos valores… pero no sé…

I: Bueno, bueno…. ¿De qué otra manera podría graficar la función?

E1: Ummm… ummm...

E2: Entonces llego a esa solución. Y ahí no la grafiqué pues…, intenté pero,… o sea como es un polinomio sexto, y así no hallé como dibujarla.

E2: Si, el gráfico, pero no lo hice. Y no lo hice por eso, porque tengo un polinomio de grado sexto y así a mano…

Los otros dos estudiantes, debido a errores algebraicos, obtienen la expresión incorrecta

$y = \frac{x^6}{6} + \frac{8x^3}{3} + 1$; uno de ellos intenta dibujar haciendo un análisis inconsistente e incoherente de la primera y la segunda derivada; el otro utiliza simultáneamente, sin mostrar ningún conflicto, la EDO (para estudiar e interpretar el signo de la primera derivada) y la fórmula obtenida (para calcular los valores de la solución en los puntos críticos) para dibujar una gráfica aproximada (ver anexo: dibujo b). En el problema 3, tres utilizan mal el método de separación de variables, escribiendo $dy = sen(y(t))dt$, lo cual probablemente sea debido a la presencia de la variable t en el lado derecho de la ecuación, y muestran dificultades con la técnica de integración de cambio de variables y con la regla de la cadena. Y sólo un estudiante, separa bien las variables e integra eficientemente para obtener $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos(y)}{1+\cos(y)}\right| = t + C$. Por lo tanto, se puede decir que en un primer momento todos los sujetos investigados movilizan un esquema algebraico y algorítmico del método de separación de variables, aunque carezca de sentido, aplicándolo mecánicamente y sin ningún control conceptual de los procedimientos ejecutados ni de los resultados obtenidos. Podemos inferir entonces que el esquema del concepto de EDO de cada estudiante se limita a un objeto algebraico en le que se relaciona una función, la variable independiente y algunas derivadas, así como una noción de resolver una ecuación que se restringe a una concepción de acción y de proceso: encontrar una fórmula que satisface la EDO, es decir, una fórmula que al ser sustituida en la EDO la reduce a una identidad, utilizando algún método de integración algebraico.

En la descripción anterior notamos que la ruta cualitativa (resolver las tareas propuestas derivando directamente de la EDO la información necesaria sin contar con una fórmula explícita para la solución) no surge de manera natural y espontánea y que hay muchas dificultades conceptuales y simbólicas para utilizar dichos esquemas algebraicos y algorítmicos:¿Qué significa separar las variables? ¿Cuándo es pertinente usarlo? ¿Cómo?. Esto nos lleva a realizar cuatro entrevistas semi-estructuradas individuales para aclarar las respuestas dadas en el cuestionario e intentar explorar el pensamiento de los estudiantes cuando se les sugiere que resuelvan una EDO por métodos cualitativos. Para esto, llegamos al acuerdo de: a) que para dibujar la gráfica de la curva solución pedida pueden utilizar sus conocimientos y técnicas del cálculo diferencial para derivar las propiedades indispensables para construir dicha gráfica y b) dado que la primera derivada ya está dada por la ED, no es necesario calcular explícitamente la fórmula de $y(x)$. Sin embargo, el pensamiento procedimental, algebraico y algorítmico, persiste con muchas limitaciones e incoherencias.

En efecto, todos se mostraron estupefactos al considerar los ítems 3.2 y 3.4 en los que se pedía encontrar $\lim_{t\to\infty} y(t)$, debido a no contar a priori con una fórmula para la solución $y(t)$. Y al abordar nuevamente el problema 1, todos fueron capaces de derivar la monotonía y los extremos analizando la expresión del lado derecho de la EDO. Pero, a pesar de que tal análisis es evidente de la expresión algebraica, recurren a construir un cuadro de variación. Además, la idea de extremo local se limita a un extremo en un punto derivable. Y para decir algo de la concavidad, todos sienten la necesidad de hallar la fórmula de la segunda derivada y no aceptan argumentos gráficos e intuitivos basados en la suavidad de las soluciones.

I: ¿Qué tipo de punto es (-2, y(-2))?

E2: Un máximo… pero, no estoy seguro de eso.

I: ¿Cómo es un máximo?

E2: Bueno, sería así $\bigcap$… alrededor de él la derivada pasa de positiva a negativa...pero aquí... va al revés, de negativa a positiva, entonces lo que tenemos es un mínimo. Entonces hay un mínimo.

I: ¡Ujum!

I: ¿Cómo seria el gráfico? Haga una propuesta de gráfico.

E2: Ummm... habría que analizar la concavidad antes, no?

I: Bueno, se podría analizar también. ¿Cómo la analizarías?

E2: Hay que derivar otra vez.

I: Ujum, a ver derive.

E2: Sería....(después de 2 minutos):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2x(x-2)^2(x+2) + 2x^2(x-2)(x+2) + x^2(x-2)^2$$

Así ¿verdad?, usando la regla de la cadena y la derivada de un producto

I: ¡Ujum!, factorice.

E2:...(después de 7 minutos):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x(x-2)\left[5x^2+2x-8\right]$$

... cómo que son irracionales las raíces, no?

I: Eso parece. ¿Qué hay en los puntos (0, y(0)) y (2, y(2))?

E2:... ummm... son puntos de inflexión.

I: Haga una propuesta de gráfico.

E2:... ummm... (parece que no encuentra por donde empezar a dibujar la gráfica).

I: ¿Dónde hay cambios de concavidad?

E2:... ummm...

I: ¿Dónde dibujaría el mínimo (-2, y(-2))? ¿arriba o debajo de la recta y=1?

E2:... ummm...

I: ¿Podría haber cambio de concavidad en (-2, y(-2))?

E2:... ummm... (hay un silencio largo)

I: ¿Sí, sí?. ¿Qué puede decir de la concavidad?

E3: Bueno... eeeh... seria necesario hallar la segunda derivada.

I: ¡Claro! o podríamos buscar algún otro tipo de argumento. Por ejemplo, sabiendo que la función es derivable, aquí en el mínimo no puede haber cambio de concavidad, porque de otra manera se formaría un pico.

E3: Ummm... si, y no puede venir hacia abajo tampoco porque ... es positiva siempre....

I: Igual aquí en el mínimo no puede ser cóncava hacia abajo a los dos lados porque se formaría un pico.

E3: ¿Ujum?

I: Observe que los puntos $(0, y(0)), (2, y(2))$ son puntos de inflexión en los cuales las tangentes son horizontales! ¿Existirán otros puntos donde haya cambio de concavidad?.

E3: ... ummm...

I: Por ejemplo, entre 0 y 2.

E3: Ahí si seria necesario encontrar la segunda derivada.

I: O bien usar algún argumento geométrico que nos evite los cálculos y nos diga como es la gráfica.

E3: ...ummm...no se me ocurre como...

Evidentemente, esta necesidad fuerte de querer contar con una fórmula para poder aplicar sus esquemas previos del cálculo, condición necesaria auto impuesta, refleja la presencia de una *concepción de acción y proceso* de los conceptos básicos del cálculo limitada a un solo registro: el registro algebraico - analítico.

El problema 2, muestra la existencia de unos conocimientos y/o habilidades muy pobres para relacionar una función y su función derivada en los registros gráfico y algebraico. No obstante, después de algunos intercambios con el entrevistador, logran derivar la información suficiente sobre la monotonía, los extremos, puntos de inflexión y la concavidad. Pero, al igual de lo que sucede en problema 1, en el momento de construir la gráfica todos muestran dificultades para articular la información cualitativa disponible sobre la función (ver anexo: dibujos a, c y d). En particular, se observan dificultades para precisar la posición relativa de los puntos $(-2, y(-2))$, $(0,1)$ y $(2, y(2))$, en el problema

1, y los puntos $(M, y(M))$, $(0,-1)$ y $(m, y(m))$, en el problema 2 (donde M y m son las abscisas de los puntos máximo y mínimo de *g(x)* respectivamente).

En los problema 3 y 4, retomando la experiencia de los problemas 1 y 2, intentan obtener alguna información de la EDO. Pero enseguida se bloquean. Así que el entrevistador les pide que recuerden y enuncien algún teorema de existencia y unicidad.

I: ¿Podría enunciar algún teorema acerca de la existencia y la unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial?

E2:.... ummm... no, creo que no recuerdo ninguno

I: Pero eso sí que lo estudiaron en el curso, ¿verdad?

E2: Sí, creo que sí, pero...ya no me acuerdo.

I: ¿Recuerda usted algún teorema de existencia y unicidad para las soluciones de una ecuación diferencial?.

E3: Si, creo que se llamaba teorema de Picard.

I: ¿Qué dice ese teorema?

E3: Ummm...no, no lo recuerdo, pero creo que también en análisis vectorial vimos algo parecido.

Y dado que ninguno lo hizo, el entrevistador tuvo que enunciarlo y discutir su interpretación y utilidad. Solo entonces, tres estudiantes logran derivar la información suficiente sobre la monotonía y la concavidad y dibujan la solución correcta (ver anexo: dibujos e, g), observándose, eso sí, una tendencia muy fuerte a rutinizar la estrategia de solución y ciertas dificultades conceptuales. En particular, las estrategias usadas para leer e interpretar la gráfica de *g(x)* en el problema 2, provocan en el problema 4 ciertas dificultades para obtener de *f(y)* la información cualitativa de *y(t)*. Por ejemplo, en un primer momento, todos determinan las regiones de monotonía en términos de la variable independiente *t*. Y un estudiante, leyendo la gráfica de *f(y)* del problema 4, obtiene para el signo de la segunda derivada de la solución de *y(t)* una expresión que está en contradicción con el comportamiento monótono y asintótico de dicha solución (ser decreciente y tener como asíntotas horizontales las rectas *y=1* y *y=0*). Esto se aprecia en los siguientes segmentos de entrevista con un estudiante:

I: A ver, no olvide que lo que pedimos es la gráfica.

E4: Pues sí... Vamos a ver... puedo hacer todo lo que yo quiera aquí, ¿verdad?

I: ¡Sí claro!, todo lo que quiera.

Luis: ...creo que es $\csc(y) = \dfrac{dt}{dy}$, sí verdad?

I: Sí, sí, siempre que $sen(y(t)) \neq 0$.

Luis: Entonces en este plano *yt* lo que estoy formando es una cosecante, ¿no?, entre 0 y π. Ahora recordemos como se comporta la cosecante, y el comportamiento de la cosecante es el comportamiento que va haber allí.

I: Si claro, está relacionada al comportamiento de la cosecante.

E4: En π y en 0 tiene dos puntos de inflexión...y en $\dfrac{\pi}{2}$ es cero, ¿no?

I: ¿Por qué dice que son puntos de inflexión?

E4: La derivada tiende a infinito, ¿no?

I: Pero... no necesariamente tienen que ser puntos de inflexión, ¿no?

E4: Bueno, no necesariamente, tendría que analizarlo un poquito más... ¡Ah!, ja, no necesariamente porque simplemente puede tender, nada más.

E4: Lo que me tiene ahorita en líos es... ¡Ah!, no, no, estoy pensando en otra cosa. Algo así diría yo...algo así (ver anexo: dibujo h). A menos que aparecieran otros puntos de inflexión, va!, que cambiara de curvatura en alguna otra parte de aquí.

I: Pero, cree que hayan otros puntos de inflexión. ¿Cómo se asegura de eso?

E4: Creo que no, pues aquí – en el gráfico – no se refleja ningún otro.

I: ¿Cómo lo ve?

E4: Por la suavidad de la curva, no?

I: ¡Ujum!

E4: No tiene ningún punto en la cual este indefinido.

I: Será por la suavidad u otra propiedad.

E4: La continuidad, ¿no?

I: Ummm…¿Cómo se garantiza que no haya puntos de inflexión?

E4: Está hablándome de la solución, no de la derivada.

I: Sí, del gráfico de la solución. Y lo que quiero que vea es que cuando crece no hace onditas.

E4: Es que creía que me decía que como podía asegurarlo, pero yo lo miraba en la derivada, vaya!. Que la derivada era….- señalando el gráfico de la cosecante.

I: Exactamente. Viendo esto – el gráfico de la cosecante- como asegura que la solución no hace ondas. Crece pero no hace ondas.

E4: ¿Cómo garantizo que aquí no hay puntos de inflexión?… no, es que si habrían puntos de inflexión aquí – señalando la gráfica de la cosecante- aparecerían puntos en los que no estaría definida, no?

I: Ummm…

E4: Yo así lo creo. Los puntos de inflexión, forzosamente, se reflejarían en que no estaría definida la derivada, ¿no?. Entonces habrían puntos en que la derivada no es continua, tendría pequeños saltitos.

I: ¿De qué otra manera surgen los puntos de inflexión?

E4: Bueno, básicamente un punto de inflexión surge donde no este definida la derivada…

E4: Bueno, agarro este pedazo, $]0,1[$, y en ese… tendría que…Bueno llegaríamos a la misma situación que antes, en $\frac{\pi}{2}$,…

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\begin{cases}<0, \text{ en }]0,\tfrac{1}{2}[\\ =0, \text{ en } y=\tfrac{1}{2}\\ >0, \text{ en }]\tfrac{1}{2},1[\end{cases}$$

¡Bueno, va! Entonces, como hemos dicho que en ½ corta a y, y $\frac{d^2y}{dt^2}$ es cero en ½…

I: Sí, sí

E4: tendríamos el mismo comportamiento anterior, la función seria cóncava hacia arriba en $]\frac{1}{2},1[$ y cóncava hacia abajo en $]0,\frac{1}{2}[$ …entonces obtendríamos la misma solución de antes, no?

I: Bueno, parecida.

E4: Parecida me sale… ¡Ah ja! f siempre es negativa…entonces tengo una función decreciente, ¿no?

I: Sí.

E4: El punto de inflexión lo tengo aquí en (0, 1/2), ¡va!

I: Ahora, hace la gráfica.

E4:...ummm…sólo me aparece un punto de inflexión porque la segunda derivada solo se anula en ½, porque en ese pedazo f solo tiene una tangente horizontal. ¡Pero… no pega!… ¿qué está mal?

Al cambiar las condiciones iniciales y pedirles que dibujen las gráficas correspondientes, a pesar de afirmar que los análisis y conclusiones obtenidos antes se conservan y que lo único que cambia son las condiciones inicales, todos producen dibujos incoherentes, dibujando los puntos de inflexión en dichas condiciones iniciales (ver anexo: dibujos f, g y h). Esto permitió rechazar la ilusión del entrevistador de que la discusión y negociación de significados sostenida, había favorecido que los estudiantes asimilaran significativamente la ruta cualitativa. Esto se muestra en los dos segmentos de entrevistas siguientes:

I: Bien, ahora dibuje la solución que pasa por el punto $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.

E3: Sería lo mismo siempre. Sólo tendría que analizar los signos acá nuevamente de la primera y la segunda derivada... ummm... ; siempre tengo que es creciente. También tengo que la segunda derivada es positiva en $]0,\frac{\pi}{2}[$ y negativa en $]\frac{\pi}{2},\pi[$. Entonces la gráfica sería ...

I: Dibújela

E3: Tenía que era creciente, cóncava hacia arriba en $]0,\frac{\pi}{2}[$ y cóncava hacia abajo en $]\frac{\pi}{2},\pi[$. Entonces en este punto $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ siempre voy a tener un punto de inflexión.

I: Haga una gráfica que Ud. crea que se aproxima.

E3: Sería así...

I: ¡Ujum! ...entonces el punto $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$es un punto de inflexión.

E3: ¡Sí!

I: Grafique ahora la solución que pasa por $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

E3: Sería lo mismo, siempre (dibujando el punto de inflexión en $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$).

I: Ahora grafique la curva solución que pasa por el punto$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

E4: Yo la graficaría así....(ver gráfica de rojo en la figura anterior).

I: Está poniendo el punto de inflexión en $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

E4: ¡Ah, no, no!, si es cierto, el punto de inflexión estará aquí...

I: ¿Dónde exactamente?

E4: Espere,...vamos a ver.

Por tanto, podemos concluir que en los *esquemas* del concepto de EDO de los sujetos investigados se evoca, por una parte, sólo una expresión algebraica en la que se relaciona una función, la variable independiente y su derivada y, por otra, una noción de resolver una EDO que supone usar algún método algebraico para encontrar una fórmula que satisfaga la ecuación diferencial. Estos *esquemas* contienen conexiones cognitivas muy débiles para: 1) leer, interpretar y tratar un problema de valor inicial planteado en el registro gráfico y 2) coordinar y usar simultáneamente los registros gráficos y algebraicos para tratar con una función implícita y sus derivadas a fin de poder construir su gráfica. Asimismo, no existe una red fuerte de relaciones gráficas e intuitivas sobre el comportamiento cualitativo de una función, que permita obtener ciertas propiedades cualitativas (concavidad, puntos de inflexión, etc.) o, de manera más general, dar argumentos y justificaciones en el registro gráfico a fin dibujar la gráfica en cuestión. Por ejemplo, observamos que la noción subyacente de extremo local se limita sólo a puntos donde la función es derivable y no contiene una imagen geométrica para el comportamiento de la función en torno a un punto no diferenciable. De tal manera que ello aparece como un obstáculo para razonar en el registro gráfico. También, existe una tendencia muy fuerte a compartimentalizar y rutinizar los conocimientos y estrategias que exige la ruta de solución cualitativa.

Así pues, los *esquemas* se pueden caracterizar por: el predominio de un modo de pensamiento algebraico y algorítmico, una concepción de acción y proceso de los conceptos implicados (función, derivada, ecuación diferencial, solución de un problema de valor inicial) y profusión de conocimientos procedimentales; también ausencia de conocimientos y habilidades metacognitivas, es decir, conocimientos conceptuales y estrategias generales que les permitan reflexionar y controlar sus cogniciones y producciones (como resultados de esos procesos) a fin resolver de manera eficiente las tareas propuestas. En fin, todo esto, en conjunto, permite caracterizar los esquemas como pobres, débiles, incoherentes y rígidos. Además, tales esquemas pueden ser considerados como un obstáculo para el modo de pensamiento y los conocimientos conceptuales que demanda la ruta cualitativa.

Conclusiones y trabajo futuro

La evidencia recogida en este trabajo permite confirmar algunas tesis ya mencionadas en otros estudios del área de la didáctica del Cálculo. A saber: 1) el desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas por sí solas no garantizan la comprensión de los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, 2) los conocimientos y/o habilidades adquiridas en el registro algebraico no se transfieren de manera automática al registro gráfico, y 3) la actividad de conversión entre representaciones no resulta por sí misma en forma automática, rápida y espontánea por el solo hecho de haber sido capaz de formar esas representaciones y efectuar tratamientos sobre ellas. Creemos que de esta manera, hemos contribuido a generar más evidencias que vienen a minar la creencia generalizada entre el profesorado en la superioridad del enfoque algebraico y algorítmico frente al enfoque gráfico/visual y numérico; creencia que permite sostener, por una parte, que un estudiante que tenga un buen desempeño en el primer enfoque automáticamente también lo tendrá en el segundo y, por otra, que la actividad de conversión entre las representaciones algebraica y gráfica resulta por sí misma en forma automática y espontánea.

Observamos que las competencias que se suponen que estos estudiantes deberían haber adquirido al finalizar la asignatura de ecuaciones diferenciales son cuestionables. Pues, su dominio de los métodos de integración de las EDO se limita a una mera manipulación simbólica, inconsistente y poco adecuada que se aplica sin sentido de pertinencia. Asimismo, hemos constatado que las capacidades para tratar, leer, interpretar y convertir información cuantitativa en un formato cualitativo y viceversa (lo que tiene un valor práctico y educativo incuestionable), no logran desarrollarse, lo que desfavorece la formación científica y el desarrollo de las competencias comunicativas de los estudiantes. Y algo muy importante, es la ausencia de conocimientos y habilidades generales y conceptuales que les permitan reflexionar y controlar sus producciones a fin resolver con éxito las tareas propuestas. Sin duda alguna, esto último debería ser una componente vital de tales competencias. Comportamientos semejantes he podido observar en mis cursos cuando les pido a mis estudiantes resolver el problema de valor inicial $y' - 2xy = 1,\ y(0) = -\frac{1}{2}$. Todos son capaces de obtener la solución siguiente $y(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Sin embargo, muchos tienen serias dificultades para acceder a las propiedades cualitativas de $y(x)$, careciendo de una imagen gráfica para ella, a pesar de que esto puede deducirse fácilmente de la EDO. Otros el único significado que atribuyen a la expresión de $y(x)$ se reduce a una mera fórmula y, en el mejor de los casos, algunos llegan a afirmar que para calcular $y(x_0)$ es necesario utilizar algún método de integración numérica. Y están aquéllos que no creen que tales expresiones sean respuestas tan aceptables como aquellas en las que sólo aparecen funciones elementales. Podría argüirse que esto es así porque esta expresión no está al alcance de los estudiantes. Pero, mirando la expresión podríamos decir que lo que subyace a sus dificultades es una construcción pobre y débil del Teorema Fundamental del Cálculo.

Evidentemente la responsabilidad de este estado de cosas, poco deseadas y decepcionantes, no puede atribuírsele sólo a los estudiantes. Pues, creemos que es determinante lo que los otros componentes del sistema didáctico (profesor y currículo) y todo su entorno les niegan a éstos: los medios cognitivos y culturales para su desarrollo intelectual y formación científico-técnica. Por ejemplo, en Zill (1988, pp. 40-41), un libro de texto muy usado en el curso de EDO (en el sistema universitario salvadoreño), se resuelve el problema de valor inicial $y' = y^2 - 4,\ y(0) = 2$, con el objeto de mostrar las limitaciones de proceder sólo en el registro algebraico y de darse por satisfecho una vez encontrada la solución general. Sin embargo, las explicaciones a las que recurren este autor y muchos de los profesores que siguen este texto se quedan en el mismo registro algebraico, mostrando solamente que existen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general. Es cierto que se muestra ahí un dibujo con algunas soluciones, pero no se hacen explícitas las relaciones de ese dibujo con la ecuación diferencial.

Así pues, nuestro trabajo futuro se dirigirá a diseñar, experimentar y evaluar propuestas didácticas alternativas para enriquecer la metodología de enseñanza del primer curso de EDO en contextos educativos que no disponen de las condiciones materiales para utilizar de manera intensiva las "nuevas tecnologías", pero que demandan urgentemente romper con la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización a que ha estado sometida la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina durante mucho tiempo. Si bien es cierto que, a la luz de la evidencia empírica, la aproximación cualitativa es plausible. Estamos conscientes de que se tiene que hacer un gran esfuerzo para crear las condiciones objetivas y subjetivas que favorezcan dicha perspectiva. Pero sobre todo, hacer un esfuerzo específico para romper con la tendencia de los estudiantes hacia el modo de pensamiento procedimental, algebraico y algorítmico y modificar el status del registro gráfico. Esto queda ilustrado muy bien en la experiencia que reporta Habre (2000) para evaluar el impacto sobre el pensamiento y conocimientos y/o habilidades de los estudiantes de un curso de EDO con orientación cualitativa. La evidencia experimental señala que los efectos esperados en el pensamiento del estudiante son mínimos y, por el contrario, el conocimiento conceptual permanece fuertemente ligado a esquemas algebraicos. De hecho, durante la última semana del curso se realizo una entrevista individual a una muestra de 9 estudiantes en la que se abordaban las cuestiones siguientes: 1) ¿En qué piensas primero cuando se te pide resolver una EDO?, 2) resuelve $y' = 2y - y^2 y$ 3) resuelve $y' + ky = -t$, t un parámetro. Los resultados obtenidos son significativos: en la cuestión 1), todos los entrevistados (9/9) pensaron primero en buscar una solución analítica. Y sólo cuando se les pidió pensar otras alternativas, 6/9 consideraron el enfoque cualitativo, pero de éstos últimos sólo 2/6 expresaron sentirse bien. En la cuestión 2), otra vez todos (9/9) escogieron en primer lugar una aproximación analítica. Sólo después de fracasar en el intento de integrar $\int \frac{dy}{2y - y^2}$, 7/9 optaron por resolver el problema geométricamente; mientras los otros 2/9 insistieron en integrar para encontrar una fórmula para la solución de la EDO. En la cuestión 3), a pesar de haber fracasado con la ecuación de variables separables dada en el problemas 2, todos los entrevistados escogieron la aproximación algebraica. Y con alguna guía todos obtienen la respuesta simbólica $y = \frac{C}{e^{kt}} - \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2}$. Sin embargo, debido a la presencia en esta fórmula de la constante C y del parámetro k, ninguno fue capaz de interpretar la fórmula obtenida.

Referencias

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingenierie didactique sur l' enseignement des equations differentielles en premier cycle universitarie, IREM, Université Paris 7, Cahiers du Séminarie de Didactique des mathématiques et de l'informatique No. 107, 284-209.

Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices, en Dubinsky, E. & Harel, G (eds),The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25. Washington, DC: MAA.

Artigue, M.(1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Gómez, P.(ed), Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamerica.

Asiala, M, Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, en Research in Collegiate Mathematics Education 2, 1-32.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000) A Calculus Graphing Scheman, en Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 31

Blanchard, P. (1994) Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint, en The College Mathematics Journal, 25, 385-393.

Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (1999) Ecuaciones Diferenciales, International Thomson.

Boyce y, W.E y DiPrima, R.C. (1986). Ecuaciones Diferenciales, 4a edición, John Wiley & Sons, Nueva York.

Campillo, P. y Devesa, A. (1999). Uso adecuado e inadecuado de un asistente matemático, en Epsilon, 45, pp. 263-274.

Chau, O. & Pluvinage, F. (1999) Comparaison de compétences dans les approches algébrique, qualitative et informatique des équations différentielles ordinaires en premiére année universitaire, en Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 195-220.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., John, D., Tolias, G. y Vidakovic (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule, en Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 345-364.

DeVries, D.J. (2001). Rumec/Apos Theory Glossary, en http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html

Devaney, R. (1995) Introduction to differential equations, en http://math.bu.edu/odes.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, en Educación Matemática, 8.3, pp. 24-41.

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficulties, en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994) Research in calculus learning: understanding of limits, derivates, and integrals, en Dubinsky, E. & Kaput, J.,(eds),Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning, MAA notes 33, p. 31-45. Washington, DC: MAA.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematics Structures, Dordrecht: Reidel.

Guerra, M. (2002). Descripción y caracterización de los esquemas conceptuales del concepto de solución de una ecuación diferencial de primer orden en estudiantes que han concluido una asignatura bajo el enfoque tradicional. Un estudio de casos. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Barcelona.

Habre, S. (2000) Exploring students'strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting, en Journal of Mathematical Behaivor, 18(4), 455-472.

Hauk, S., Mason, A., Selden, A. y Selden, J. (1999). Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems, Technical Report, No 1999-5, Department of Mathematics, Tennessee Technological University.

Hernández, A. (1994). Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias, Cuadernos de Investigación No 30, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge: An introductory analysis, en J. Hiebert (ed). Hillsdale, NJ: Elbaum.

Hubbard, J.H. & West, B.H. (1991). Differential Equations, a Dynamical Systems Approach part I. Editorial Springer-Verlag.

Moreno, M. & Azcárate,C.(1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos, en Enseñanza de las Ciencias, 15(1), 21-24.

Moreno, M. (2000). El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Estudio de casos. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.

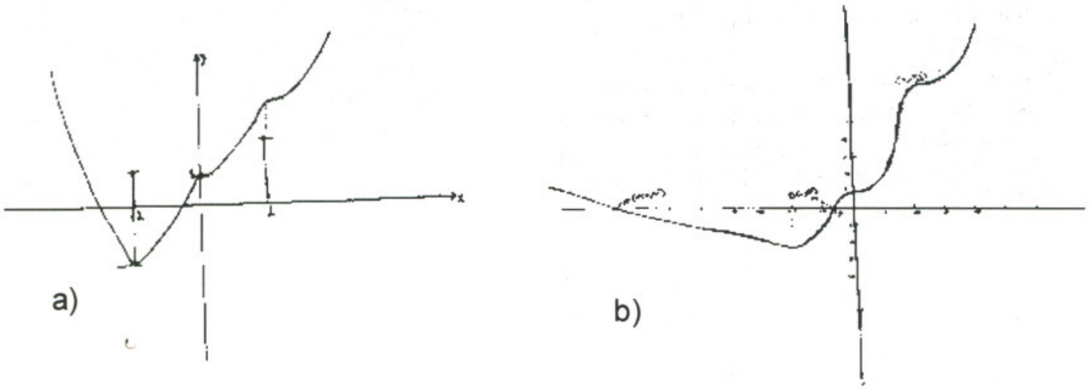
Piaget, J. y García, R. (1983). Psicogénesis e historia de la ciencia, Ed. Siglo XXI, México, D.F.

Rota, G. (1997). Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations, en http://space.tin.it/scuola/vdepetr/Text07.htm.

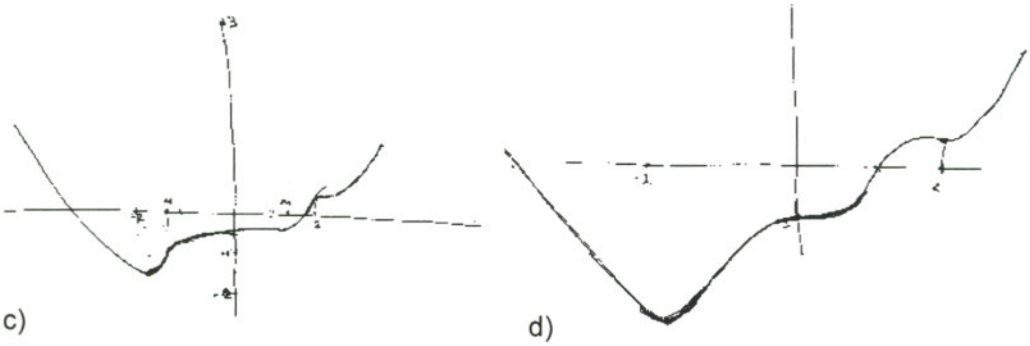
Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, en Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Zill, D. (1988). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Ed. Ibeoamérica.

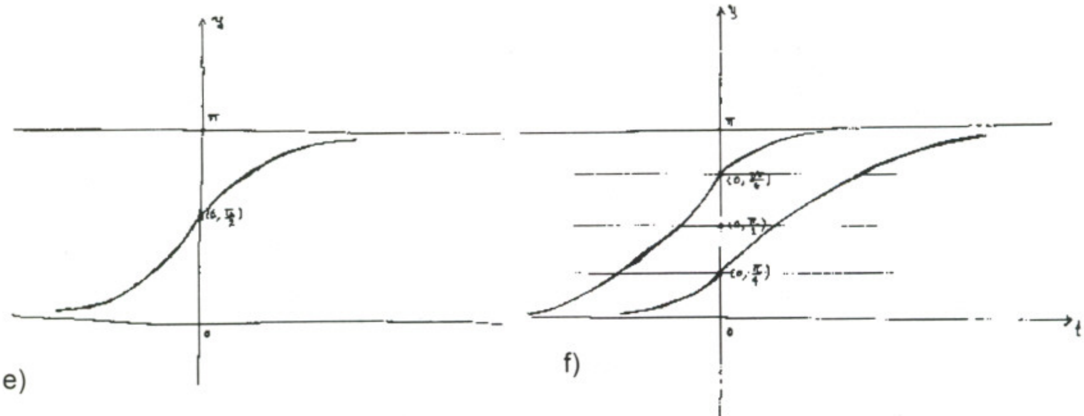
Anexo: dibujos de algunas soluciones



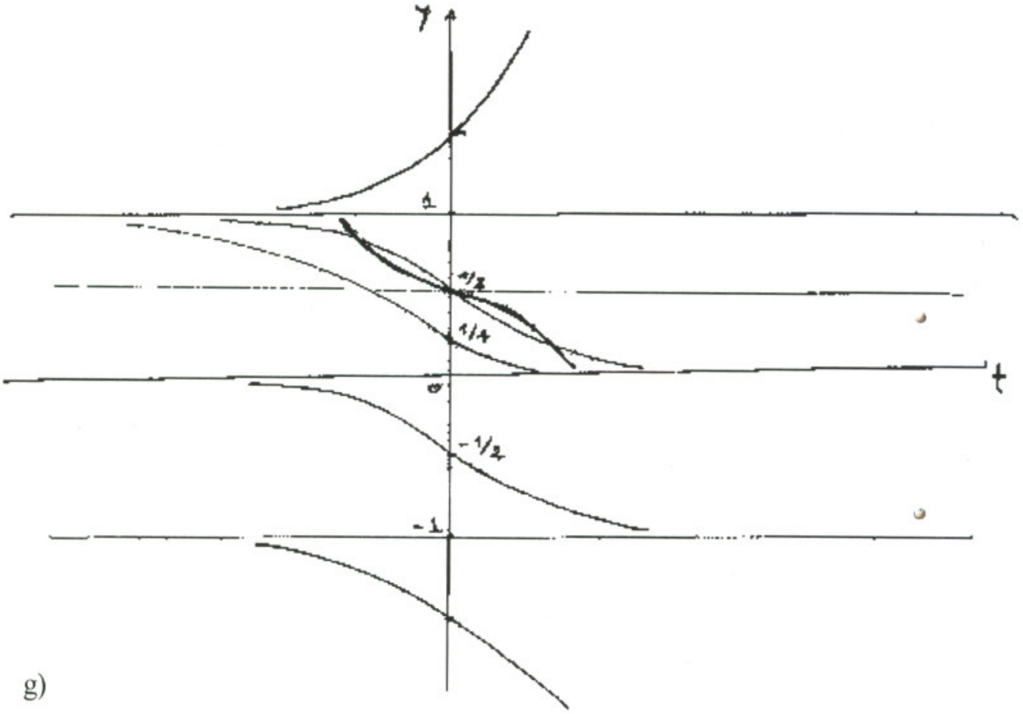
Dibujos de dos estudiantes para el problema 1



Dibujos de dos estudiantes para el problema 2

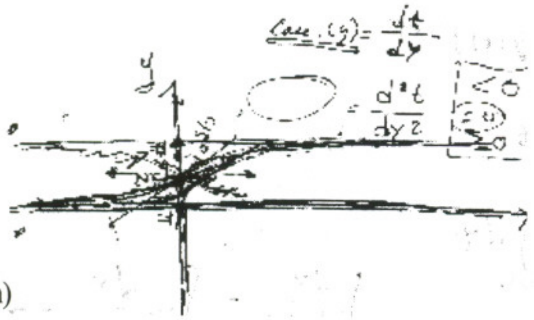


Dibujos de un estudiante para el problema 3

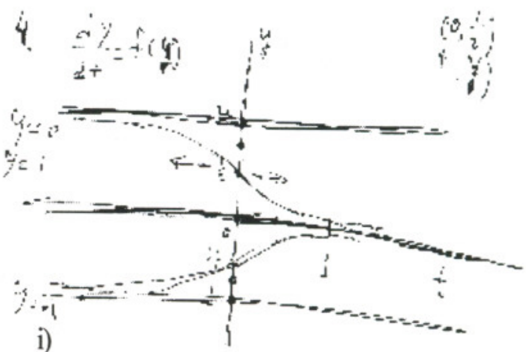


g)

Dibujo de un estudiante para el problema 4



h)



i)

Dibujos de un estudiante para los problemas 3 (h) y 4 (f)