UNIVERSIDAD DON BOSCO
FACULTAD DE HUMANIDADES
ESCUELA DE EDUCACIÓN

Desarrollo del Programa de Matemática I para la Facultad de Ciencias y Humanidades de la Universidad Don Bosco

TRABAJO DE GRADUACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA PARA LA ENSEÑANZA DE FÍSICA Y MATEMÁTICA.

PRESENTADO POR:
BALMORE ANTONIO HERNÁNDEZ

MARZO 2002

SOYAPANGO EL SALVADOR, CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DON BOSCO

RECTOR

ING. FEDERICO MIGUEL HUGUET RIVERA

SECRETARIO GENERAL

LIC. MARIO OLMOS sdb

DECANO DE FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

LIC. JOSÉ HUMBERTO FLORES MUÑOZ

ASESORA

LICDA. LUISA AMELIA SIBRÍAN ESCOBAR

JURADO EXAMINADOR

LICDA. CECILIA DEL ROSARIO RÍVAS CORTÉZ

LIC. FABIÁN ANTONIO BRUNO

AGRADECIMIENTOS

Dios todopoderoso por darme la vida por medio de mis padres y a la vez por aberme concedido uno de los primeros anhelos de la vida profesional, a mis rofesores que dan su sabiduría, tiempo y comprensión sin esperar ompensación.

DEDICATORIA

Este esfuerzo que con sacrificio se me ha hecho realidad se lo dedico con todo cariño a mi familia por la comprensión y apoyo que me brindo en todo el proceso de estudio.

A mi hijo / a Cristian y Lorena que los prive de diversión por mucho tiempo, mi esposa Dora Alicia quien fue el primer apoyo que tuve de principio a fin, que sin esto no lo hubiera logrado.

INDICE

Contenido ***Pág.***

UNIDAD II CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES

Introducción

Este documento consiste en una recopilación bibliográfica para proporcionar al estudiante los conocimientos matemáticos básicos para completar y reafirmar los adquiridos en educación media y a la vez que le sirva como una guía al docente para desarrollar el programa de matemática I de la facultad de Ciencias y Humanidades de la Universidad Don Bosco.

Dentro de las unidades a desarrollar se tiene la unidad I: Lógica Proposicional; la unidad II: Conjuntos, Relaciones y la unidad III: Funciones especiales. Cada una de estas unidades está compuesta por una serie de contenidos, que abarcan su desarrollo; se presentan ejemplos y una guía de ejercicios para que el docente la utilice como guía de trabajo dirigida a estudiantes y estos puedan autoevaluarse.

Esta recopilación bibliográfica se ha hecho con el propósito de facilitar la investigación que muchas veces es difícil obtenerla.

Al docente y estudiantes se les recomienda que así como el desarrollo de la enseñanza es cambiante y a pesar de que la matemática es una ciencia exacta, podemos llegar a desarrollar un método donde éste proceso se facilite de tal manera que no sea una materia que cause dificultad al momento de cursarla.

Para el estudio de este trabajo o texto es suficiente el álgebra y la geometría que el alumno(a) cursó en bachillerato. Sin embargo, no se espera que domine la temática de dichas materias (álgebra y geometría).

- **Se sugiere a los/as estudiantes que:**
  No deben sorprenderse si a la primera lectura no entienden por completo algún tema. Para estudiar y aprender Matemática siempre se requiere de papel y lápiz en mano, y no vacilar en usarlos.

Uno de los objetivos de este trabajo es que el estudiante aprenda a analizar los principios básicos relacionados con dicha asignatura.

Características Didácticas

- **Diseño del texto**

  La mayoría de las figuras y gráficas aparecen después de la información literaria, tan cerca como sea posible de lugar en que se mencionen por primera vez.

  Además se ha utilizado un segundo color para destacar figuras y enunciados importantes lo cual facilita el estudio de lo expresado.

- **Ejemplos**

  Cada contenido contiene ejemplos cuidadosamente seleccionados para ayudar al docente y alumnos(as) a desarrollar y entender los conceptos nuevos.

- **Ejercicios**

  Los ejercicios empiezan con problemas fáciles y avanzan gradualmente hacia otros más difíciles. Los problemas de aplicación (ejemplos) aparecen cerca del final de un contenido o subcontenido para que los alumnos(as) adquieran confianza en las operaciones y en los nuevos conceptos, antes de intentar resolver cuestiones que requieren del análisis de casos prácticos.

Objetivos

General

- Proporcionar una guía del desarrollo de la asignatura de Matemática I de la Facultad de Ciencias y Humanidades.

Específicos

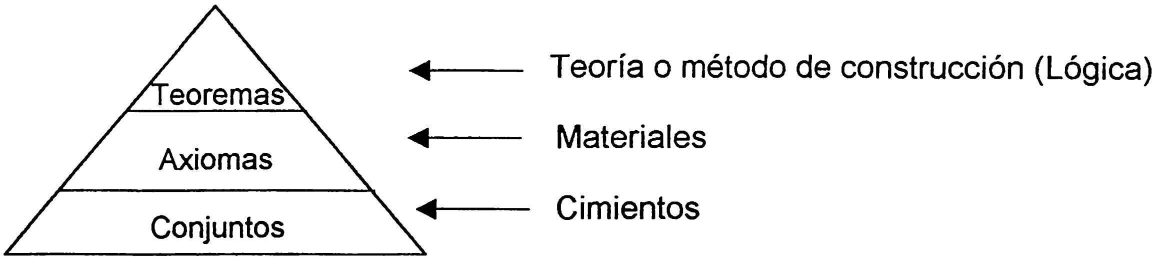
- Que el estudiante desarrolle los ejercicios presentados en el documento.

- Que el estudiante utilice la guía de la asignatura de Matemática I.

UNIDAD I: Lógica Proposicional

Introducción

La matemática considerada como una estructura arquitectónica, presenta los siguientes fundamentos:



Las disciplinas que estudian los fundamentos de la matemática son la teoría de conjuntos y la lógica. La teoría de conjuntos nos ofrecen los cimientos y el material de construcción; pero la teoría de conjuntos no nos enseña como ensamblar los materiales de construcción. El proceso mediante el cual se sobreponen los materiales matemáticos es el campo de la prueba matemática, de la derivación de teoremas, que solo es posible gracias a la lógica.

En un desarrollo elemental como el presente solo se estudiará la parte de la lógica llamada "Teoría de proposiciones" y que algunos conocimientos elementales de teoría de conjuntos servirá para dar una idea de cómo se aplica la lógica para construir el edificio matemático, la más grandiosa creación de la razón humana.

1 Lógica Proposicional.

Es la disciplina que estudia las formas y leyes mas generales del pensamiento humano.

¿Cuál es el objeto de la lógica?. Es el estudio de los métodos y principios para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto, estableciendo la manera de relacionar las partes de un discurso llamados proposiciones mediante términos llamados conectivos.

La manera de relacionar las diversas partes de un discurso, es lo que se conoce con el nombre de estructura lógica; adoptaremos un simbolismo apropiado para representar los discursos o argumentos verbales por fórmula, en las cuales se pone en relieve las estructuras lógicas.

Proposiciones

Definición.- Una proposición es una expresión con sentido en un lenguaje que afirma o niega algo, pero no ambas cosas al mismo tiempo.

Toda proposición se caracteriza por ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas al mismo tiempo; esta caracterización hace que las proposiciones difieran de las preguntas, órdenes o exclamaciones.

La "verdad" o "falsedad" de una proposición se llama valor de verdad

Ejemplo:

a) La Universidad Don Bosco es la primera Universidad acreditada en el país.
b) "Cinco es impar y mayor que dos"

c) "Seis es múltiplo de doce"
d) El hombre es un animal racional

a. Es una proposición y es verdadera
b. Es una proposición con dos componentes y verdadera.
c. Es una proposición y su valor de verdad es falsa
d. Es una proposición y su valor de verdad es verdadera

2 Conectivos Lógicos y Enunciados Compuestos.

Las proposiciones pueden ser: *simples o compuestas.*

Una proposición es simple cuando dice una sola cosa (una componente) como los ejemplos "a" y "c".

Una proposición es compuesta o coligativa, cuando se forma por la unión de dos proposiciones simples (dos componentes) por medio de conectivos gramaticales que llamaremos conectivos lógicos, ejemplo "b"

2.1 Simbología:

Las proposiciones simples se representan por letras minúsculas a partir de p, q, r, s, etc.

- Los conectivos lógicos son: $\wedge$ = (y)

  $\vee$ = (ó)

  $\Rightarrow$ = (entonces, implica)

  $\Leftrightarrow$ = (sí y solo sí)

  $\sim$ p= (no p, o negación de p)

- El valor de verdad de una proposición simple se representa por:

  υ (p); se lee, valor de verdad de "p"

  υ (s); se lee, valor de verdad de "s"

- El valor de verdad una proposición compuesta

  $\upsilon(p \wedge q)$; se lee, valor de verdad de "p y q"

  $\upsilon(p \Leftrightarrow q)$; se lee, valor de verdad de "p si y solo si q"

3 La Conjunción y la Disyunción.

3.1 Conjunción

Definición.- Si dos proposiciones están unidas por la palabra "y" (o un vocablo equivalente), a la palabra proposición resultante se le llama conjunción, si las proposiciones se simbolizan por p y q, entonces la conjunción se denota por "$p \wedge q$"

Ejemplo:

Simbolice la conjunción: "Dos es número par y es primo"

Solución

Sean p: "Dos es número par"

q: "Dos es número primo"

$p \wedge q$: "Dos es número par y es primo"

3.2 Disyunción (inclusiva)

Definición: Sean p y q proposiciones se llama disyunción de p con q, a la proposición "p ó q" , la cual se denota por "$p \vee q$"

Ejemplo:

Simbolice la disyunción: "-3 es mayor que –1 ó –7 es mayor que 7"

Sean p: "-3 es mayor que –1"

q:"-7 es mayor que 7"

Luego $p \vee q$, sería : "-3 es mayor que –1 ó –7 es mayor que 7"

4 La Negación

4.1 Negación

Definición: La negación en una proposición se forma colocándole la palabra "no" o anteponiéndole una frase como "no es cierto que". El símbolo "$\sim$ " se emplea para indicar la negación de una proposición.

Ejemplo:

Si p: "María es secretaria"

$\sim p$: "María no es secretaria"

$\sim p$: "No es cierto que María es secretaria"

4.2 Condicional

Definición: Sean p, q, proposiciones, se llama condicional o implicación de antecedente p y consecuente q, a la proposición "si p entonces q" la cual se simboliza así: "$p \Rightarrow q$"

Ejemplo:

"Si estudias, entonces apruebas el curso"

Simbólicamente es equivalente a : $p \Rightarrow q$, donde p: "estudias" .... es el antecedente.

q: "Apruebas el curso" ...., es el consecuente

5 Conectivos de la Implicación

5.1 Bicondicional

Definición: Sean p y q proposiciones, se llama bicondicional o equivalencia de p con q, a la proposición "p sí y solo sí q", la cual se denota por $p \Leftrightarrow q$ y se define como $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftarrow p)$

Ejemplo:

"Cinco es número primo sí y solo sí tiene dos divisores"

donde p : "Cinco es un número primo"

q "Cinco tiene dos divisores

Luego "Cinco es número..............." se representa por: $p \Leftrightarrow q$

5.2 Tablas de Verdad

Toda proposición tiene un valor de verdad, así, si p es una proposición denotaremos su valor de verdad por υ (p).

Si p es verdadera, diremos que su valor de verdad es V y escribiremos:

υ (p) = V

En caso contrario, escribiremos: υ (p) = F

5.3 Valor de Verdad de una Conjunción

El valor de verdad de una proposición compuesta **es verdadera sí y solo sí, el valor de verdad de cada una de las componentes es verdadero.**

Las siguientes opciones que puede asumir la proposición ($p \wedge q$) se resumen en el siguiente arreglo:

Opción	p	Q	$p \wedge q$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	F

Tabla 1.

Ejemplo:

Sean $p: \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$ y

$q : 4 - 10 = -6$

$\upsilon(p \wedge q) =?$

Solución:

$\upsilon(p) = F$ y $\upsilon(q) = V$

Luego, $V(p \wedge q) = F$ (la 3ª opción de la tabla 1)

5.4 Valor de Verdad de una Disyunción

El valor de verdad de ($p \vee q$) es falso sí y solo sí $\upsilon(p) = F$ de lo contrario es verdadero.

Su tabla de verdad es:

Opción	P	Q	$p \vee q$
1	V	V	V
2	V	F	V
3	F	V	V
4	F	F	F

Tabla 2

Ejemplo:

Sean p : "Un triángulo es un polígono"

q : "$\frac{1}{2}$ es la mitad de 2"

υ (p $\vee$ q) =?

Solución:

υ (p) = V y υ (q)= F

Luego,υ (p $\vee$ q) = V (2ª opción de la tabla 2)

5.5 Valor de Verdad de una Negación

Sea p una proposición, la negación de p es la proposición "$\sim$p " υ(no p) cuya tabla de verdad es:

Opción	P	$\sim$p
1	V	F
2	F	V

Tabla 3

Ejemplo:

p : " El conjunto N es finito"

υ ($\sim$ p) = ?

Solución:

υ (p) = F, luego V ($\sim$ p) = V (2ª opción de la tabla 3)

5.6 Valor de Verdad de una implicación

La proposición p $\Rightarrow$ q es falsa solamente en el caso que υ(p) = V y υ(q) = F. Su tabla de verdad es:

Opción	P	q	p$\Rightarrow$q
1	V	V	V
2	**V**	**F**	**F**
3	F	V	V
4	F	F	V

Tabla 4

Ejemplo:

Si $\frac{1}{0}$ = 0, entonces $\frac{0}{1}$ = 0

υ (p $\Rightarrow$ q) = ?

Solución:

υ (p) = F y υ(q) = V

Luego, υ (p $\Rightarrow$ q) = V (3ª opción de la tabla 4)

5.7 Valor de Verdad de una Bicondicional

La proposición " p $\Leftrightarrow$ q" es verdadera, si p y q tienen el mismo valor de verdad. Su tabla de verdad es:

Opción	p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	**V**	**V**	**V**
2	V	F	F
3	F	V	F
4	**F**	**F**	**V**

Tabla 5

Ejemplos:

1) 16 es par (p = v), sí y sólo sí 2 es factor de 16 (q = v)
2) 16 es par (p = v), sí y sólo sí 3 es factor de 16 (q = f)
3) 16 es impar (p = f) sí y sólo sí 2 es factor de 16 (q = v)
4) 16 es impar (p = v) sí y sólo sí 3 es factor de 16 (q = f)

Las tablas de verdad de las cinco operaciones binarias pueden resumirse en la siguiente tabla única.

	p	**q**	**p.q**	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	V	V	V	V	F	V	V
2	V	F	F	V	V	F	F
3	F	V	F	V	V	V	F
4	F	F	F	F	F	F	V

Partiendo de operaciones complejas por ejemplo: sea la proposición compleja: $(p.q) \rightarrow -r$.

Siguiendo el procedimiento para elaborar tablas de verdad, la tabla queda así:

Opción	p	q	r	p.q	→	-r
1	V	V	V	V	F	F
2	V	V	F	V	V	V
3	V	F	V	F	V	F
4	V	F	F	F	V	V
5	F	V	V	F	V	F
6	F	V	F	F	V	V
7	F	F	V	F	V	F
8	F	F	F	F	V	V

Ejemplo:

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{16}{15} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,{}^{3}\!/_{5} = \frac{11}{5}$

υ (p $\Leftrightarrow$ q) = ?

Solución:

υ (p) = F y υ (q) = F

Luego, υ (p $\Leftrightarrow$ q) = V (4ª opción e la tabla 5)

6 Tautología, Contradicción, Contingencia

Una proposición compuesta se dice que es una:

a) Tautología : Si en su tabla de verdad, todas las combinaciones posibles son verdaderas.

Ejemplo:

1. El partido en el poder manipula las elecciones (p = v) o el gobierno lo apoya (q = v).

b) Contradicción: Si en su tabla de verdad, la proposición compuesta siempre es falsa.

Ejemplo:

1. El partido en el poder respeta las votaciones (p = f) o el gobierno respeta el voto (q = f).

c) Contingencia: Si en su tabla de verdad, el valor de verdad de la proposición compuesta es por lo menos una vez verdadera y por lo menos una vez falsa.

Ejemplo:

1. El partido en el poder manipula las elecciones (p = v) o el gobierno respeta el voto (q = f).
2. El partido en el poder respeta las elecciones (p = f) o el gobierno lo apoya (q = v).

La tabla de verdad representa Tautología, Contradicción y Contingencia.

Opción	**p**	**q**	**p∨q**	
1	V	V	V	Tautología
2	F	V	V	
3	V	F	V	Contingencia
4	F	F	F	Contradicción

UNIDAD II: CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES

2.1 Conjunto, Definiciones y Notación

El concepto de conjunto ha sido utilizado de forma tan generalizada en todas las matemáticas modernas, que es preciso su conocimiento por parte de todo estudiante de nivel Universitario. Los conjuntos son un medio por el cual los matemáticos hablan de colecciones de objetos de una manera abstracta.

Conjunto se puede definir como "*Agrupación de objetos simples en un todo*": intuitivamente pensamos en conjunto como una colección de objetos del mismo tipo o que tienen una característica común.

Los objetos que integran un conjunto se llaman *elementos,* no se supone ninguna propiedad uniforme de los objetos que forman un conjunto fuera de que están agrupados para constituirlos.

La totalidad de estudiantes que estén cursando Matemática I, forma un conjunto. La colección formada por una pluma, una silla y una flor es otro conjunto.

Los números 1, 2, 3..., constituyen el que se llama ***Conjunto de los Números Naturales,*** que se denota por **N**. Los números 0,1,2,3....., forman el ***Conjunto de los enteros no negativos*** Z^+.

Notación.

Se usan letras mayúsculas como A, B, C, ... Y, Z para denotar conjuntos, y letras minúsculas, como a,b ,c......y, z para denotar los elementos del conjunto. De ser posible, es común colocar entre llaves los elementos del conjunto y separarlos por comas.

Para saber si un elemento "x" pertenece a un conjunto "A" se escribe "$x \in A$" y se lee "x pertenece a A".

Si "x" no es elemento de "A", entonces escribiremos "$x \notin A$" y se lee " x no pertenece a A".

Ejemplo:

Sea B = $\{5,7,9\}$. Es claro que $7 \in B$, $5 \in B$, $9 \in B$, $2 \notin B$, ya que 2 no está en el conjunto B.

Existen dos maneras de expresar o definir a un conjunto:

a) **Por Extensión.-** Cuando se pueden enumerar o listar los elementos del conjunto, separados entre sí por comas y encerrarlos todos entre llaves.

Ejemplo:

A = { 2,4,6,8,10 }

b) **Por Comprensión.-** Cuando se da una propiedad que caracteriza sus elementos.

Ejemplos:

a) B = El conjunto de los números enteros mayores que dos. (por descripción verbal)
b) C = $\{x / x$ es un número Natural impar$\}$
c) D = $\{x / x \in Z, -3 < x < 15\}$.... (por fórmula)

Cuando un conjunto se define por medio de una regla, ésta debe expresarse con palabras o bien, por brevedad, con símbolos.

Ejemplos:

a) Enumerar los elementos del Conjunto X = $\{x / x = 2n, n \in Z^{+}\}$ precisamente se encuentran los valores que toma n.

n toma los valores de 0,1,2,3......, puede tomar también valores negativos –1,-2,-3,-4

Se determinan ahora los valores que adquiere 2n (2n significa 2 por n), 2n se obtiene multiplicando cada uno de los números -1,-2,-3,... por 2, de modo que x = 2n toma los valores de 0,2,4,6,8,.... por consiguiente X = { -6,-4,-2,....}

Nota: $\{x / x = 2n, n \in Z\}$ *se puede escribir como* $\{2n / n \in Z\}$

b) Enumerar los elementos del conjunto H = $\{3x / 0 < x < 10, x \in N\}$

X toma valores de 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

3x toma valores de 3,6,9,12,15,18,21,24,27.

entonces H = { 3,6,9,12,15,18,21,24,27 }

1.1 Conjunto Nulo o Vacío.

Definición: El conjunto que no tiene ningún elemento se llama Conjunto nulo o vacío y se denota por Φ **.**

Ejemplo:

a) $\Phi = \{ x \in U / x \neq x \}$
b) El conjunto de los números naturales entre 1 y 2 es vacío.
c) El conjunto de satélites naturales del planeta Venus también es vacío.

Ejercicios 1

INDICACIONES: Enumere los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos

1. Los nombres de los días de la semana.

   ____

2. Los nombres de los meses del año que tiene exactamente 30 días.

   ____

3. Los nombres de los continentes de la Tierra.

   ____

4. Los nombres de los departamentos de El Salvador que inicien con la letra "S".

   ____

5. Los números naturales pares entre 1 y 15.

   ____

6. Los números naturales divisibles entre 5.

   ____

7. Los números naturales entre 40 y 55 que son divisibles entre 15.

   ____

8. $\{x/x = n+7, n \in N\}$

   ____

9. $\{ x/x = 5n, n \in N \}$

   ____

10. $\{ x/x = 7n-3, n \in N \}$

    ____

11. $\{ 5n+1/n \in N \}$

    ____

12. $\{ 6n-3/n \in N \}$

    ____

13. $\{\ 4x / x < 5, x \in N\ \}$

____

14. $\{3x / 1 < x < 7, x \in N\}$

____

15. $\{\ 4x / 0 < x < 11, x \in N\ \}$

____

1.2 Subconjuntos.

Definición: Un conjunto A es subconjunto de un conjunto B, si todo elemento de A es un elemento de B.
Si A es subconjunto de B, se escribe $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

Nota: Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Ejemplos:

1. Si A = {1,2,3} y B = {1,2,3,4} entonces $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$
2. Los subconjuntos del conjunto {1,2,3} son: {1,2,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1}, {2}, {3}, ϕ.

Nota: El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

La notación $A \not\subset B$ se lee "A no es subconjunto de B", esto significa que existe por lo menos un elemento de A que no está en B.

Ejemplo:

Si A = $\{a, b, c\ \}$ y B = $\{1, 2, a, b\ \}$, entonces A $\not\subset$ B

1.3 Conjuntos Iguales.

Definición: Dos conjuntos A y B son iguales, lo cual se expresa A = B, si todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A.

Nota: A = B significa que las relaciones $A \subset B$ y $B \subset A$ se cumplen simultáneamente.

Ejemplos:

Sea A = {1,2,3} y B = {3,1,2}, entonces A = B.

$A \subset B$ y $B \subset A$

La notación A $\neq$ B, que se lee “A no es igual a B” significa que existe por lo menos un elemento que pertenece a A pero no a B, o bien por lo menos un elemento que pertenece a B pero no a A.

Ejemplo:

Si A = {1,3,5} y B = {1,2,3,5}, entonces A $\neq$ B aunque $A \subset B$, $B \not\subset A$

jercicios 2

IDICACIÓN: Escriba la expresión verdadera o falsa para cada uno de los iuientes ejercicios.

an A y B dos conjuntos.

1. Si todo elemento de A es elemento de B, entonces $A \subset B$

 ____

2. Si $X \subset Y$ y $a \in Y$, entonces $a \in X$

 ____

3. Si $y \in B$, ¿entonces y es subconjunto de B?

 ____

4. Escriba todos los subconjuntos del conjunto $\{1\}$.

 ____

5. Si A = $\{a,b\}$, use uno de los símbolos , $\in, \notin, \subset$ o $\not\subset$ para hacer verdadera cada una de las siguientes expresiones. (Escríbalo en el espacio entre las dos expresiones).

 a) a ________ A

 b) c ________ A

 c) $\{a\}$ ________ A

 d) $\{a,b\}$ ________ A

 e) $\{a,c\}$ ________ A

6. Dados los conjuntos A = {1,2,3}, B = {1,3,5}, C = {2,4,6}, D = {1,2,3,4,5} y E = {1,2,3,4,5,6,7}, determine cuál de los enunciados siguientes son verdaderos y cuáles son falsos.

 a) $A \subset B$ __________

 b) $B \not\subset C$ __________

 c) $A \subset D$ __________

 d) $C \subset D$ __________

e) $B \subset B$ ____________

f) $\phi \subset A$ ____________

2 Operaciones con Conjuntos.

2.1 Unión.

Definición: La unión de dos conjuntos A y B, la cual se denota por AUB, es el conjunto de todos los elementos que están el conjunto A y / o en el conjunto B.

Es el conjunto de elementos que pertenecen por lo menos a uno de los dos conjuntos.

AUB = {x/x $\in$ A o x$\in$ B }.

Ejemplos:

1). Sea A = {1,2,3} y B = {1,2,5}
Entonces AUB = {1,2,3,5}

2). Sea A = {2,4,6} y B = {a,b,c}
Entonces AUB = {2,4,6,a,b,c}

Nota: Para dos conjuntos cualesquiera A y B se cumple

1. A$\subset$ (AUB)
2. B$\subset$ (AUB)
3. AUB = BUA
4. AU ϕ=A

2.2 Intersección

Definición: La intersección de dos conjuntos A y B, la cual se denota por $A \cap B$, es el conjunto de elementos que están a la vez en ambos conjuntos A y B.

$A \cap B = \{x / x \in A$ y $x \in B\}$

Ejemplos:

Si A = {1,2,3} y B = {1,3,5}

Entonces $A \cap B$ = {1,3}

Si A = {a,b,c} y B = {d,e,f}

Entonces $A \cap B = \phi$

2.3 Conjuntos Disjuntos

Definición: Dos conjuntos A y B son Disjuntos o Ajenos si $A \cap B = \phi$

Nota: Para dos conjuntos cualesquiera A y B se cumple

1. $(A \cap B) \subset A$
2. $(A \cap B) \subset B$
3. $(A \cap B) = (B \cap A)$
4. $A \cap \phi = \phi$

Ejemplos: Dados los conjuntos:

$A = \{x / 1 < x < 10, x \in N\}$ y $B = \{3x / 0 < x < 6, x \in N\}$

Encontrar AUB y $A \cap B$

Solución: El conjunto A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} y B = {3,6,9,12,15}

Entonces:

$$AUB = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15\} \text{ y } A\cap B = \{3,6,9\}$$

Definición: Se llama *Conjunto Universal* a aquél que contiene todos los elementos que interesan en una situación determinada.
Se denota usualmente por **U**.

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,6,8\}$, $C = \{8,11,14\}$ y A,B y C comprenden el conjunto universal U, entonces
$U = \{1,2,3,4,6,8,11,14\}$

Ejercicio 2

Empleando las definiciones de Unión, Intersección, Conjunto Universal y Conjuntos Disjuntos complete con verdadero o falso para los siguientes ejercicios.

1. Sean A y B dos Conjuntos.
   a) Si $a \in A$, entonces a es elemento de AUB
   b) Si $a \in AUB$ entonces a es elemento de A
   c) Si $a \in AUB$, entonces a es elemento de $A\cap B$
   d) Si $a \in A\cap B$, entonces a es elemento de B
   e) Si $A \not\subset B$ y $a \in A$, entonces a es elemento de B
   f) Si $A \not\subset B$ y $a \in A\cap B$, entonces a es elemento de A

2. Sean A = {1,2,3,4,5}, B = {2,4,6}, C = {6,7,8} y D = {5,7,9}
   Enumere los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes.

   a) AUC ______________________________
   b) BUC ______________________________
   c) CUD ______________________________
   d) $A \cap C$ ______________________________
   e) $B \cap C$ ______________________________
   f) $C \cap D$ ______________________________
   g) $D \cap \phi$ ______________________________

3. Dados A = $\{n/0<n<9, n \in N\}$, y B = $\{3n-1/0<n<6, n \in Z\}$ y C = $\{2n+1/0<n<6, n \in N\}$, encuentre cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) AUB ______________________________
   b) $A \cap B$ ______________________________
   c) $B \cap C$ ______________________________

4. Determine el Conjunto Universal U para cada uno de los ejercicios siguientes, si los conjuntos dados comprenden U.

   a) A = {1,3,5,7,9}, B = {1,2,3,4}, C = {4,10,14}______________________________
   b) AUB A = {1,2,3,4,5,6}, B = {4,6,8,10}______________________________
   c) A = {1,2,3,4,5}, $A \subset C$ C = {3,6,9}______________________________

3 El Conjunto de los enteros.

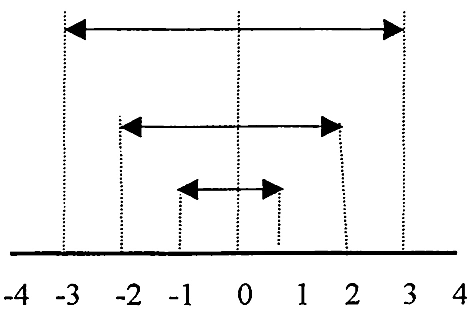
Definición: La unión del conjunto de los enteros negativos, los enteros no negativos y el cero constituye el _Conjunto de los Enteros_ que se denota por **Z**.

$$Z = \{\ldots, -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Cuando se juega a las cartas, es posible representar por +¢10.00 una ganancia de ¢10.00, mientras que una pérdida de ¢8.00 se puede representar por -¢8.00 . Cierta posición de 1,000 metros sobre el nivel del mar puede denotarse por +1,000 metros, mientras que una de 50 metros bajo dicho nivel, se puede denotar por –50 metros.

A partir de estos ejemplos se ve que es posible emplear los signos (+) y (-) para indicar dos direcciones opuestas.

Puesto que los enteros positivos se sitúan a la derecha del origen en la recta numérica, los negativos deben ubicarse a la izquierda del origen. De esta manera las gráficas del conjunto de los enteros negativos constituyen puntos a la izquierda del cero. En general, los enteros a y –a son coordenadas de puntos situados en lados opuestos con respecto al origen y equidistante de él.



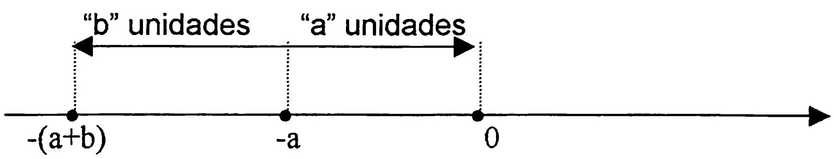
Obsérvese que al hacer un recorrido hacia la derecha sobre la recta numérica, los números aumentan de valor y al hacerlo hacia la izquierda, disminuyen de valor.

Por ejemplo $-2 < -1$, $-3 < 0$, $-1 > -3$, $1 > -2$.

La dirección positiva es hacia la derecha, mientras que la negativa es hacia la izquierda.

3.1 Suma de números enteros

Para sumar dos números enteros negativos (-a) y (-b) en la recta numérica, se empieza en el origen.

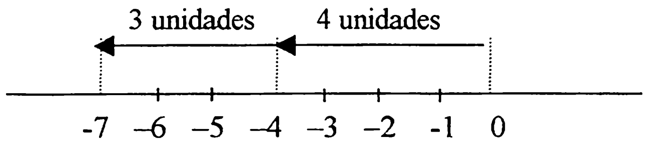


Se recorre "a" unidades en la dirección negativa, hacia la izquierda del cero, y se llega a la gráfica del entero negativo (-a). A partir de este punto, se recorre "b" unidades en la misma dirección y se alcanza así el punto que está a a+b unidades a la izquierda del cero. La coordenada de este punto es -(a+b) e igual a la suma de los enteros negativos (-a) y (-b).

Ejemplo: Sumar –4 y –3 en la recta numérica.

Solución: Se recorren 4 unidades en la dirección negativa partiendo del origen y, luego, 3 en la misma dirección. De esta manera se llega al punto cuya coordenada es –7.

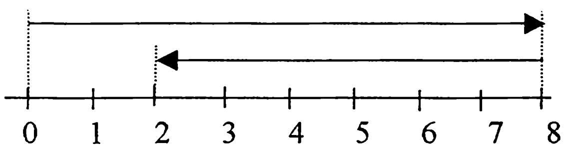
Por consiguiente $(-4) + (-3) = -7$



Ejemplo: Calcular 8 + (-6) en la recta numérica.

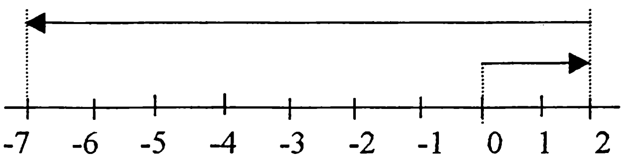
Solución: Partiendo del origen, se recorren 8 unidades en la dirección positiva y se alcanza la gráfica del número +8. A partir de este punto, se recorren 6 unidades en la dirección negativa y se llega al punto cuya coordenada es +2.

Por consiguiente 8 + (-6) = 2

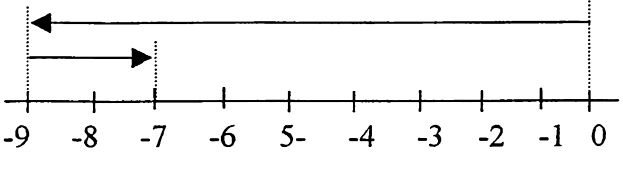


Ejemplo:

Calcular 2 + (-9) en la recta numérica.



Por tanto (-9) + 2 = -7



Ejercicios 3

Calcule gráficamente las sumas siguientes.

1). (-4) + (-1)
2). (-2) + (-2)
3). 6 + (-3)
4). 4 + (-2)
5). 4 + (-7)
6). 2 + (-10)
7). 7 + (-7)
8). (-8) + 10
9). (-2) + 6
10). (-5) + 2
11). (-10) + 10
12). 10 + (-6) + (-8)

3.2 Sustracción o resta de números enteros

Definición: Si la suma de dos números es cero, se dice que los números son inversos aditivos.

Para cada número $a \in Z$ existe un número único $(-a)$ en A tal que $a + (-a) = 0$

Por consiguiente, los números a y $(-a)$ son inversos aditivos.

El número $(-a)$ se denomina algunas veces el negativo del número "a".

Observación: El negativo del número (a) es $-(a)$ o simplemente $-a$.

Ejemplos:

1. (-5) es el inverso aditivo de 5; 5 + (-5) = 0
2. 8 es el inverso aditivo de (-8); (-8) + 8 = 0

Teorema 1. Si $a \in$ N entonces $-(-a) = a$

Demostración.

Se hizo notar antes que no solamente es $(-a)$ el inverso aditivo de a, sino que también a lo es de $(-a)$.

Puesto que $(-a) + [-(-a)] = 0$, $-(-a)$ es el número aditivo de $(-a)$.

De esta manera $-(-a)$ y a son inversos aditivos de $(-a)$, puesto que los inversos aditivos son únicos, $-(-a) = a$.

Ejemplo: $-(-10) = 10$

Definición: Si a, b $\in$N, entonces a-b = a + (-b); o sea sustraer o restar b de a es igual a sumar el inverso aditivo de b al número a.

Nota: $+(-a) = -a$

Ejemplo: $+(-4) = -4$

Teorema: si a, b $\in$ N, entonces $(-a) + b = -a + b = -(a - b)$

Nota: $a - b = a + (-b) = (-b) + a = -b + a$

Observación: Cuando a es numéricamente menor que b y se tiene $-a$+b, se escribe como +b-a y luego se efectúa la operación.

$$-7 + 19 = +19 - 7 = 12$$

Cuando a es numéricamente mayor que b se tiene a + b, se escribe en la forma $-(a - b)$ y luego se realiza la operación.

$$-10 + 8 = -(10 - 8) = -2$$

Ejemplos:

1) $(-8) + 6 = -8 + 6$
$= -(8 - 6) = -(2) = -2$

2) $5 - 8 = - 8 + 5$
$= -(8 - 5) = -3$

3) $10 - (-6) = 10 + 6 = 16$

Nota: $-a - b = (-a) + (-b) = -(a + b)$
$- 9 - 13 = (-9) + (-13) = -(9 + 13) = -22$

Nota:

- Si $a > b$, entonces $a - b > 0$
  $365 - 294 = 71$

- Si $a = b$, entonces $a - b = 0$
  $259 - 259 = 0$

- Si $a > b$, entonces $a - b > 0$
  $2641 - 5473 = - 5473 + 2641$
  $= -(5473 - 2641)$
  $= -2832$

Nota: Si a, $b \in \mathbf{N}$ y $a \neq b$, entonces $a - b \neq b - a$
$7 - 5 = 2$ mientras que $5 - 7 = -2$

Ejemplos

1) $-7 - 15 = -(7 + 15) = -22$
2) $8 - 3 + (-7) - (-6) = 8 - 3 - 7 + 6 = 8 + 6 - 3 - 7$

   $= (8 + 6) - (3 + 7)$

   $= 14 - 10 = 4$
3) $10 + (4 - 12) = 10 + (-8) = 10 - 8 = 2$
4) $7 + (2 - 15) = 7 + (-13) = -13 + 7 = -(13 - 7) = -6$
5) $-17 + (6 - 14) = -17 + (-8) = -17 - 8 = -(17 + 8) = -25$
6) $6 - (-4 + 8) = 6 - (4) = 6 - 4 = 2$
7) $12 - (3 - 10) = 12 - (-7) = 12 + 7 = 19$

Ejemplos

1) Restar (5) de (7)

   $(7) - (5) = 7 - 5 = 2$

2) Restar (10) de (3)

   $(3) - (10) = 3 - 10 = -10 + 3 = -(10 - 3) = -7$

3) Restar (-5) de (7)

   $(7) - (-5) = 7 + 5 = 12$

4) Restar (5) de (-7)

   $(-7) - (5) = -7 - 5 = -(7 + 5) = -12$

5) Restar (-5) de (-7)

   $(-7) - (-5) = -7 + 5 = -(7 - 5) = -2$

6) Restar (-15) de (-9)

   $(-9) - (-15) = -9 + 15 = 15 - 9 = 6$

Ejercicios 3

Obtenga el valor de cada una de las siguientes expresiones

1) (-3) + (-6) ____________________
2) (-4) + (-10) ____________________
3) (-12) + (-7) ____________________
4) 17 + (-8) ____________________
5) 25 + (-13) ____________________
6) 22 + (-19) ____________________
7) 8 + (-12) ____________________
8) 9 + (-17) ____________________
9) 12 + (-15) ____________________
10) -5 + 7 ____________________
11) –8 – 10 ____________________
12) -20 +13 ____________________
13) 4 – 7 + 8 ____________________
14) 7 – 20 + 18 ____________________
15) 16 – 27 + 5____________________

Efectúe la suma de cada una de las siguientes parejas de números.

1) 354 y – 78
2) -215 y 370
3) 280 y –573
4) -735 y 216
5) -164 y -253

En los ejercicios siguientes, restar el primer número del segundo:

1) 10 de 13 __________________
2) 20 de 12 __________________
3) – 8 de 6 __________________
4) - 4 de 15 __________________
5) 2 de 9 __________________
6) 10 de –7 __________________
7) -14 de –25 __________________
8) -30 de –18 __________________
9) 164 de 238 __________________
10) 891 de 274 __________________

3.3 Multiplicación de enteros

La multiplicación de enteros positivos es la misma que la de los números naturales. Se requiere solamente definir el producto de un entero positivo y uno negativo y el de dos enteros negativos.

Teorema: Si a, b $\in$ N , entonces $a(-b) = -(ab)$.
Es decir el producto de un entero positivo y uno negativo es un entero negativo.

Ejemplo: $3(-4) = -(3 \times 4) = -12$
Teorema: Si a, b $\in$ N, entonces $(-a)(-b) = ab$

Demostración:
$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= [-(a)](-b)\\ &= [-(a)(-b)]\\ &= -[-(ab)]\\ &= ab\end{aligned}$$

O sea el producto de dos enteros negativos es uno positivo.

Ejemplos:

1) $(-6)(-9) = 6 \times 9 = 54$
2) $-5 \times 4 \times 3 = [-5 \times 4](3)$
   $= (-20)(3) = -60$
3) $7(-8)(6) = [7(-8)](6)$
   $= (-56)(6) = -336$
4) $-2(-9)(10) = [-2(-9)](10)$
   $= (18)(10) = 180$
5) $-3(-4)(-8) = [-3(-4)](-8)$
   $= (12)(-8) = -96$

Nota: Cuando una expresión contiene sumas, restas y multiplicaciones sin símbolos de agrupación, se efectúan primero las multiplicaciones antes que las sumas y restas. (el paréntesis significa multiplicación)

Ejemplos:

1) $12(3-9) - 10 = 12(-6) - 10$
$= -72-10 = -82$
2) $12 + 4(3-12) = 12 + 4(-9)$
$= 12 - 36 = -24$
3) $15 - 7(2-11) = 15 - 7(-9)$
$= 15 + 63 = 78$
4) $20(-4-1) - 13(-8+2) = 20(-5) - 13(-6)$
$= -100 + 78 = -22$
5) $-3(a + 2b - 5) = -3(a) + (-3)(2b) + (-3)(-5)$
$= -3a - 6b + 15$

Ejercicios 3

Encuentre los valores de los siguientes ejercicios.

1) $5(-6)$ ____________________
2) $-7(8)$ ____________________
3) $-15(-4)$ ____________________
4) $-8(5)(6)$ ____________________
5) $7(-2)(3)$ ____________________
6) $5(-4)(0)$ ____________________
7) $9(7)(-2)$ ____________________
8) $17(4)(-1)$ ____________________
9) $-8(3)(-2)$ ____________________

10) 4(-5)(-8) ______________________

11) 20-(-18)+ 8 (-2) ______________________

12) 12 –2 x 8 + 2 – (-9) ______________________

13) 9x7 – 6x10 - 7(-4) ______________________

14) 8+2(-4) – 6(7-8) ______________________

15) 8x12 – 5(-4) + 7(2-10) ______________________

Efectúe las multiplicaciones

16) 4(a -2) ______________________

17) 8(2 a -3) ______________________

18) -2 (a + 6) ______________________

19) -12(3- a) ______________________

20) –2(4-5 a) ______________________

21) 2(a -b-4) ______________________

22) 2(3 a -b-1) ______________________

23) -8(a -b-2) ______________________

3.4 División de números enteros.

De la multiplicación se tiene 4 x 6 = 24. Cuando el número 6 se multiplica por 4, el resultado es 24. Dicho número (6) se llama cociente de 24 dividido por 4. En símbolos escribimos 24 ÷ 4 = 6 o bien $\frac{24}{4} = 6$. El símbolo ÷ se lee "entre" o "dividido por" y significa división.

Definición: Si a ,b, c $\in$ Z con b$\neq$0 y a = bc entonces $\frac{a}{b} = c$

Cuando $\frac{a}{b} = c$, el número se denomina dividendo, b es el divisor y c ó $\frac{a}{b}$ se llama cociente. El cociente $\frac{a}{b}$ también se denomina fracción; a es el numerador y b es el denominador de la fracción. A veces, nos referimos a a y b como los términos de la fracción.

Ejemplos:

1) $\frac{16}{2} = 8$ ya que 2 x 8 = 16
2) $\frac{-21}{-7} = 3$ puesto que (-7)(3) = -21
3) $\frac{54}{-6} = -9$ dado que (-6)(-9) = 54
4) $\frac{-15}{3} = -5$ ya que 3(-5) = -15

Nota:

El cociente de dos números positivos o dos negativos es uno positivo. El cociente de un número positivo dividido por un negativo, o bien un número negativo entre uno positivo es un número negativo.

Cuando una expresión contiene multiplicaciones y divisiones sin símbolos de agrupación, se efectúan dichas operaciones en el orden que aparezcan.

Ejemplos:

1) 6 x 2 ÷ 4 = 12 ÷ 4 = 3
2) 24(-3) ÷ 9 = -72 ÷ 9 = -8
3) 48 ÷ 8 x 2 = 6 x 2 = 12
4) 96 ÷ (-6) x 8 = -16 x 8 = -128
5) 104 ÷ 13 ÷ 2 = 8 ÷ 2 = 4

Cuando una expresión contiene las cuatro operaciones aritméticas sin símbolos de agrupación, se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden que aparezcan, antes de efectuar las sumas y restas.

Ejemplos:

1) $36 \div 12 + 6 = 3 + 6 = 9$
2) $16 \div 8 - 4 = 2 - 4 = -2$
3) $7 + 28 \div (-7) = 7 + (-4) = 7 - 4 = 3$
4) $27 \div 9 \times 3 + 2 \times 8 - 8 = 3 \times 3 + 16 - 8$
   $= 9 + 16 - 8 = 25 - 8 = 17$
5) $-32 \div 4 \times 2 - 6 \div 2 + 4 = -8 \times 2 - 3 + 4$
   $= -16 - 3 + 4$
   $= -19 + 4 = -15$

Si la expresión contiene símbolos de agrupación con solamente números específicos en su interior, primero se llevan a cabo las operaciones incluidas en dichos símbolos.

Ejemplos:

1) $(27-3) \div 8 + 4(5-7) = (24) \div 8 + 4(-2)$
   $= 3 - 8 = -5$
2) $72 \div (-8) \times 2 - 4 \div (6-4) = (-9) \times 2 - 4 \div (2)$
   $= -18 - 2$
   $= -20$

5 El cero y la División

El producto de cero y cualquier número $a \in Z$ es cero

x 5 = 0 , 0(-6) = 0

La división se define a partir de la multiplicación.

$= 4$ porque 2 x 4 = 8 y

$\frac{18}{6} = -3$ ya que 6(-3) = -18

Considérese $\frac{0}{8}$; se busca un número $a \in Z$ tal que 8 x a = 0. Este número es cero.

Ahora bien consideremos $\frac{4}{0}$; en este caso buscamos un número $a \in Z$ tal que x a = 4.

Tal número no existe, puesto que 0 x a = 0 para todo $a \in Z$.

Considérese por último $\frac{0}{0}$; ahora se busca un número b$\in$Z tal que 0 x b = 0.

Este enunciado es cierto para cualquier número b $\in$ Z

x 4 = 0, 0(-12) = 0 , 0 x 0 = 0

Es decir, b no es un número único y un cociente debe serlo.

Por consiguiente, para cualquier número $a \neq 0$ se tiene.

$= 0$ $\frac{a}{0} =$ no esta definido $\frac{0}{0}$ no es un número único es indeterminado

Observación

Puesto que $\frac{p}{q}$ no está definido cuando q = 0, todos los denominadores de las fracciones se supondrán diferentes a cero.

Ejercicios 2.3.4

Obtenga el valor de cada una de las siguientes expresiones.

1) $56 \div 8$ ________________

2) $48 \div 16$ ________________

3) $24 \div (-6)$ ________________

4) $48 \div (-8)$ ________________

5) $-16 \div 8$ ________________

6) $-36 \div 4$ ________________

7) $-18 \div (-9)$ ________________

8) $-63 \div (-7)$ ________________

9) $2 \times 8 \div 4$ ________________

10) $10 \times 6 \div 15$ ________________

11) $6 \div 2 + 9 \div 3$ ________________

12) $48 \div 16 - 4 \times 2$ ________________

13) $15 \div (-3) + 8$ ________________

14) $18 \div (-3) + 14(-2)$ ________________

15) $9 \div 3 \times 2 + 7 \times 8 - 3$ ________________

16) $12 \div 4 \times 3 - 8 \div 4 \times 2$ ________________

17) $27 \times 3 \div 9 + 2 (6 - 4)$ ________________

18) $24 \times 5 \div 12 - 10(6-3)$ ________________

19) $7 + 3(8-5) - 4 \div (-2)$ ________________

20) $15 - 2(-5) - (20-4) \div 8$ ________________

4 El Conjunto de los Números Racionales

Dados $a, b \in z, b \neq o$, el cociente $\frac{a}{b}$ no siempre existe en el conjunto de los enteros, por ejemplo cuando $a = z$ y $b = 3$. Esto pone de manifiesto la necesidad de ampliar el conjunto de los enteros.

Definición: Cuando el conjunto de los enteros se extiende para incluir todos los cocientes de la forma $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in z, q \neq o$ se obtiene el conjunto de los números racionales denotado por Q.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} | p, q \in z, q \neq o \right\}$$

Observemos que $\frac{a}{1}$ en Q es igual a a en z. Del mismo modo $\frac{2a}{2}$ en Q es igual a a en Z. De este hecho resulta que las representaciones fraccionales de los enteros no son únicas, lo cual conduce a la siguiente definición:

Si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s} \in Q$,, entonces $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ sí y sólo sí ps = qr

De la definición se tiene que si $\frac{p}{q} \in Q$ y $k \in z, k \neq o$ entonces

$$\frac{p}{q} = \frac{k' p}{kq}.$$

Ejemplos

1) $\frac{2}{3} = \frac{5(2)}{5(3)} = \frac{10}{15}$

2) $\frac{-7}{4} = \frac{-3(-7)}{-3(4)} = \frac{21}{-12}$

lota: Si $\frac{p}{q} \in Q$ entonces $\frac{-p}{q} = \frac{(-1)(-p)}{(-1)(q)} = \frac{p}{-q}$

Definición: Las fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{kp}{kp}$ se llaman fracciones equivalentes.

Cuando la fracción $\frac{p}{q}$ se escribe en la forma $\frac{kp}{kq}$, se dice, que está en términos ıayores.

Si la fracción $\frac{kp}{kq}$ se expresa en la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q no tienen factores omunes, se considera que está en términos mínimos o reducida.

Ejemplos:

Escribir una fracción equivalente $\frac{5}{7}$ con –42 como denominador.

olución: puesto que –42 = (-6)(7) se tiene que

$$= \frac{(-6)(5)}{(-6)(7)} = \frac{-30}{-42}$$

Expresar en fracción $\frac{72}{80}$ en su forma reducida

Solución: $\frac{72}{80} = \frac{8 \times 9}{8 \times 10} = \frac{9}{10}$

4.1. Reducción de Fracciones

Definición: El entero mayor que divide a un conjunto de enteros se denomina su máximo común divisor (o factor) y se denota con la abreviatura M.C.D.
El máximo común divisor de un conjunto de números contiene todos los factores primos que son comunes a todos los miembros del conjunto. y a cada factor primo lo contiene el mínimo número de veces que está contenido en cualquiera de los números.

Ejemplo: Encontrar el M.C.D. de los números 60, 72, 84.

Solución: Primero factorizamos los números en sus factores primos

60 = 2. 2. 3. 5
72 = 2. 2. 2. 3. 3
84 = 2. 2. 3. 7

El máximo número divisor es 2. 2. 3 = 12
Cuando el máximo común divisor de dos números a y b es 1, decimos que ambos son relativamente primos. El M.C.D. de 64 y 75 es 1. Por lo tanto, estos números son relativamente primos.

Una aplicación de M.C.D. es la reducción de una fracción a sus términos mínimos, empleando la regla

$$\frac{kp}{kq} = \frac{p}{q}$$

Ejemplo: Reducir la fracción $\frac{24}{36}$ a sus términos mínimos.

Solución: se expresa 24 y 36 en sus factores primos y luego se obtiene su M.C.D.
24 = 2. 2. 2. 3

36 = 2. 2. 3. 3

MCD = 2. 2. 3 = 2

Por consiguiente $\dfrac{24}{36}=\dfrac{12.2}{12.3}=\dfrac{2}{3}$

Ejemplo: Reducir la fracción $\dfrac{252}{288}$ a sus términos mínimos.

Solución: 252 = 2. 2. 3. 3. 7

288 = 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3

M.C.D. = 2. 2. 3. 3 = 36

Por lo tanto $\dfrac{252}{288}=\dfrac{36.7}{36.8}=\dfrac{7}{8}$

Nota: es posible reducir una fracción sin calcular el M.C.D. Se factorizan ambos números y se divide tanto el numerador como el denominador por los factores comunes.

$$\frac{252}{288}=\frac{(\cancel{2}.\cancel{2}).(\cancel{3}.\cancel{3}).7}{(\cancel{2}.\cancel{2}).2.2.2.(\cancel{3}.\cancel{3})}=\frac{7}{8}$$

Nota: $\dfrac{a+b}{c}$ significa $(a+b)\div c$

Ejemplos:

1) $\dfrac{4\div 9}{8}=\dfrac{13}{8}$

2) $\dfrac{15-4}{12}=\dfrac{11}{12}$

3) $\dfrac{25-10}{9}=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3}$

Nota: $\dfrac{a}{b+c}$ significa $a\div(b+c)$

Ejemplos:

1) $\dfrac{6}{3+4}=\dfrac{6}{7}$

2) $\dfrac{8}{9-19}=\dfrac{8}{-10}=\dfrac{4}{-5}$

Nota: $\dfrac{a+b}{c+d}$ significa $(a+b)\div(c+d)$

Ejemplos:

1) $\dfrac{8+9}{4+3}=\dfrac{17}{7}$

2) $\dfrac{16-4}{15-2}=\dfrac{12}{13}$

3) $\dfrac{17+4}{13-6}=\dfrac{21}{7}=3$

Observación: Redúzcase siempre la fracción final.

Ejercicios 4

Encuentre el numerador o denominador faltante

1) $\frac{1}{2} = \frac{}{6}$ ____________________

2) $\frac{1}{8} = \frac{}{72}$ ____________________

3) $\frac{2}{3} = \frac{}{12}$ ____________________

4) $\frac{3}{16} = \frac{12}{}$ ____________________

5) $\frac{6}{7} = \frac{24}{}$ ____________________

6) $\frac{8}{9} = \frac{}{-27}$ ____________________

Reduzca las fracciones siguientes a sus términos mínimos.

7) $\frac{4}{12}$ ____________________

8) $\frac{12}{30}$ ____________________

9) $\frac{24}{40}$ ____________________

10) $\frac{72}{63}$ ____________________

11) $\frac{96}{128}$ ____________________

12) $\frac{8}{12}$ ____________________

Obtenga los valores de las expresiones siguientes:

13) $\dfrac{2+11}{2}$ ______________________________

14) $\dfrac{7-4}{4}$ ______________________________

15) $\dfrac{6-17}{3}$ ______________________________

16) $\dfrac{20+7}{-6}$ ______________________________

17) $\dfrac{25-5}{-5}$ ______________________________

18) $\dfrac{15-18}{-9}$ ______________________________

4.2 Suma de Números Racionales

Definición: Si $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{q} \in Q$, entonces $\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{q} = \dfrac{p+r}{q}$

Es decir, la suma de los números racionales con un mismo denominador es un número racional cuyo numerador es la suma de los numeradores y cuyo denominador es el denominador común.

Ejemplos:

1) $\frac{2}{13}+\frac{5}{13}=\frac{2+5}{13}=\frac{7}{13}$

2) $\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{3+5}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

La definición de suma se puede extender al caso de números racionales con denominadores distintos.

Puesto que $\frac{p}{q}=\frac{ps}{qs}$ y $\frac{r}{s}=\frac{qr}{qs}$

Se tiene $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}=\frac{ps+qr}{qs}$

El número qs es un múltiplo común de q y s.

Ejemplo:

$$\frac{4}{7}+\frac{1}{6}=\frac{4(6)}{(7)(6)}+\frac{(7)(1)}{(7)(6)}=\frac{(4)(6)+(7)(1)}{(7)(6)}=\frac{24+7}{42}=\frac{31}{42}$$

Definición: El menor entero positivo divisible por cada uno de los miembros de un conjunto de enteros se llama su mínimo común múltiplo y se denota con la abreviatura m.c.m.

El mínimo común múltiplo de un conjunto de enteros debe contener todos los factores primos, cada uno de ellos el máximo número de veces que esté contenido en cualquiera de los números.

Ejemplos:

Encontrar el mínimo común múltiplo de 12,16,18.

Solución: Se factorizan los números en sus factores primos

12 = 2.2.3

16 = 2.2.2.2

18 = 2.3.3

m.c.m. = 2.2.2.2.3.3 = 144

Obtener el mínimo común múltiplo de 36, 48, 60.

Solución: Se factorizan los números en sus factores primos.

36 = 2.2.3.3

48 = 2.2.2.2.3

60 = 2.2.3.5

m.c.m = 2.2.2.2.3.3.5 = 720

El número común múltiplo de los denominadores de un conjunto de fracciones se denomina mínimo común denominador y se denota con la abreviatura m.c.m con minúsculas para distinguir de M.C.D, que es el máximo común divisor.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes primero se halla el mínimo común denominador y luego se combinan utilizando la regla:

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$$

Ejemplo:

Efectuar $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}$

Solución: $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}=\frac{21}{36}+\frac{10}{36}+\frac{8}{36}=\frac{21+10+8}{36}=\frac{39}{36}=\frac{13}{12}$

4.3 Sustracción de números racionales

De la definición de adición o suma se tiene que:

$$\frac{p}{q}-\frac{-p}{q}=\frac{p+(-p)}{q}=\frac{0}{q}=0$$

Por consiguiente $\frac{-p}{q}$ es el inverso aditivo de $\frac{p}{q}$

También $\frac{p}{q}-\frac{p}{q}=0$; o sea, $\frac{-p}{q}$ es el inverso aditivo de $\frac{p}{q}$

Por lo tanto $-\frac{p}{q}=\frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}$

Por ejemplo: $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$

La sustracción o resta de números racionales se define en base a la adición.

Esto es $\frac{p}{q}-\frac{r}{q}=\frac{p}{q}+\frac{-r}{q}=\frac{p+(-r)}{q}=\frac{p-r}{q}$

También $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{p}{q}+\frac{-r}{s}=\frac{P(s)}{q(s)}+\frac{q(-r)}{(q)s}=\frac{Ps+q(-r)}{qs}=\frac{Ps-qr}{qs}$

Ejemplo:

1) $\frac{3}{8}-\frac{7}{8}=\frac{3-7}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$

2) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3(2)-1(5)}{5(2)}=\frac{6-5}{10}=\frac{1}{10}$

3) $\frac{9}{10}-\frac{5}{12}=\frac{54-25}{60}=\frac{29}{60}$

El mínimo común denominador es:

m.c.d = 48

$$\frac{9}{16}-\frac{5}{12}=\frac{3(9)-4(5)}{48}=\frac{27-20}{48}=\frac{7}{48}$$

$\div$

Combinar $\frac{7}{12}-\frac{5}{9}+\frac{13}{18}$

Solución el m.c.d. = 36 :

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{9}+\frac{13}{18}=\frac{3(7)-4(5)+2(13)}{36}$$

$\div$

$$=\frac{21-20+26}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

Ejercicios 4

Encuentre el mínimo común múltiplo de cada uno de los siguientes conjuntos de números.

1) 2,3,4 ______________

2) 4,9,12 ______________

3) 6,9,12 ______________

4) 6,10,18 ______________

5) 2,3,5 ______________

Efectúe las siguientes operaciones con fracciones y expresar el resultado en forma reducida.

1) $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$ ______________

2) $\frac{5}{3}+\frac{7}{6}$ ______________

3) $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$ ______________

4) $\frac{5}{13}+\frac{8}{13}$ ______________

5) $\frac{11}{16}+\frac{9}{16}-\frac{15}{16}$ ______________

6) $\frac{20}{17}-\frac{9}{17}+\frac{6}{17}$ ______________

7) $\frac{7}{19}-\frac{15}{19}+\frac{8}{19}$ ______________

4.4 Multiplicación de números racionales

Definición: Si $\frac{p}{q},\frac{r}{s}\in Q$ entonces $\frac{p}{q}$ x $\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$

Es decir, el producto de dos números racionales es un número racional cuyo numerador es el producto de los respectivos numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores respectivos.

Ejemplos:

1) $\frac{2}{3} \text{ x } \frac{5}{7} = \frac{2\text{x}5}{3\text{x}7} = \frac{10}{21}$

2) $\frac{3}{5}\text{x}\frac{-10}{21} = \frac{3(-10)}{5(21)} = \frac{-30}{105} = -\frac{2}{7}$

4.5 División de los números racionales

Definición: Si el producto de dos números es igual a 1 se dice que los números son inversos multiplicativos o recíprocos.

Si $\frac{p}{q} \in Q$ y $\frac{p}{q} \neq 0$, entonces $\frac{p}{q}\text{x}\frac{q}{p} = \frac{pq}{qp} = 1$

Por consiguiente, $\frac{p}{q}$ y $\frac{q}{p}$ son recíprocos.

La división de números racionales se define a partir de la multiplicación.

Si $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ y $\frac{r}{s} \neq 0$, entonces

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{\frac{p}{q}\text{x}\frac{s}{r}}{\frac{r}{s}\text{x}\frac{s}{r}} = \frac{\frac{p}{q}\text{x}\frac{s}{r}}{1} = \frac{p}{q}\text{x}\frac{s}{r}$$

Definición:

Si $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ y $\frac{r}{s} \neq 0$, entonces

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \text{x} \frac{s}{r}$$

De modo que dividir por una fracción es equivalente a multiplicar por el recíproco de ella.

1) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \text{x} \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$

2) $\frac{-5}{6} \div \frac{25}{81} = -\frac{5}{6} \text{x} \frac{81}{25} = \frac{5\text{x}81}{6\text{x}25} = \frac{27}{10}$

3) $-\frac{12}{35} \div \left(-\frac{9}{28}\right) = \frac{12}{35} \div \frac{28}{9} = \frac{12\text{x}28}{35\text{x}9} = \frac{16}{15}$

Ejercicio 4

Efectué las operaciones indicadas y simplifique

1) $\frac{2}{3} \text{x} \frac{3}{4}$ ______________________________

2) $\frac{5}{2} \text{x} \frac{8}{15}$ ______________________________

3) $\frac{7}{8} \text{x} \frac{4}{21}$ ______________________________

4) $-\frac{8}{9} \text{x} \frac{12}{16}$ ______________________________

5) $\frac{22}{24}\left(\frac{16}{44}\right)$ ______________________

6) $\frac{5}{6} \div \frac{5}{3}$ ______________________

7) $\frac{3}{4} \div \frac{9}{16}$ ______________________

8) $\frac{15}{4} \div \frac{9}{8}$ ______________________

9) $-\frac{12}{21} \div \frac{32}{14}$ ______________________

10) $-\frac{26}{27} \div \frac{39}{36}$ ______________________

5. Factorización de números

5.1 Factorización de números

Definición:

El conjunto de los número primos consta de todo aquel número natural mayor que 1 que sea divisible únicamente por el mismo y la unidad.

Los números primos menores que 100 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 87,97.

Definición: Un número natural mayor que 1 se llama compuesto si no es primo.

Todo número compuesto puede expresarse como un producto de primos en una y solamente una forma, sin tener en cuenta el orden de los factores. Este enunciado se conoce como el *Teorema Fundamental de la Aritmética*. Las notas siguientes son útiles para factorizar un número compuesto en sus factores primos.

Nota: Un número es divisible por 2 si termina en 0,2,4,6,8

Ejemplo:

El número 714 es divisible por 2 , ya que termina en 4.

Nota: Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Ejemplo:

El número 528 es divisible por 3, dado que la suma de sus dígitos es 5+2+8 = 15

Nota: Un número es divisible por 5 si termina 0 ó 5.

Ejemplo:

El número 930 es divisible por 5, puesto que termina en 0.

Para encontrar los factores primos de un número dado, se empieza con los números primos en orden. Se verifica si el número es divisible por 2; si es así, se divide por 2 y se obtiene el cociente. Si éste último también es divisible por 2, se divide nuevamente por la misma cantidad, y así sucesivamente hasta obtener un cociente que no sea divisible por 2.

Luego se analiza si el cociente es divisible por 3. Cuando se haya dividido por 3 todas las veces posibles, se verifica si el cociente es divisible por 5. y así continua con los primos mayores sucesivos hasta que el cociente sea 1. Todos los divisores obtenidos son los factores primos del número dado.

Ejemplo:

Encontrar todos los factores primos de 780

Solución:

$$
\begin{array}{r|l}
780 & \div 2 \\
390 & \div 2 \\
195 & \div 3 \\
65 & \div 5 \\
13 & \div 13 \\
1 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, los factores primos de 780 son: 2,2,3,5,13

Esto es 780 = 2.2.3.5.13

Nota:

Es posible concluir la prueba de divisibilidad de un número dado, cuando se llega a uno primo, tal que al multiplicarse por sí mismo. da como resultado un producto mayor que el número dado.

Ejemplo:

1) 59 es primo y las únicas pruebas que se requieren son las 2,3,5 y 7. El número siguiente que hay que probar es 11 pero 11 x 11 = 121 que es mayor que 59.
2) En el caso de 149 se analizan 2,3,5 7 y 11 y se finaliza, ya que 13x13=169

Ejercicios 5

Escriba los números siguientes en términos de factores primos.

1) 12 ____________________

2) 18 ____________________

3) 24 ____________________

4) 28 ____________________

5) 36 ____________________

6) 40 ____________________

7) 44 ____________________

8) 46 ____________________

9) 50 ____________________

10) 56 ____________________

11) 64 ____________________

12) 70 ____________________

13) 78 ____________________

14) 84 ____________________

15) 96 ____________________

16) 112 ____________________

17) 131 ____________________

18) 144 ____________________

19) 157 ____________________

20) 176 ____________________

5.2 Factorización de Polinomios

Cada uno de los números que se multiplican entre si para obtener un producto, se llama factor. Algunas veces es deseable escribir un polinomio como el producto de varios de sus factores. Este proceso se llama factorización. En particular este documento se factorizaran polinomios con coeficientes enteros.

Factores: se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicados entre si dan como producto la primera expresión.

Así multiplicando a por $a+b$ tenemos

$$a(a+b)=a^2+ab$$

a y $a-b$, que multiplicamos entre si dan como producto a^2+ab, son factores o divisores de a^2+ab.

Del modo propio $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$. Luego $x+2$ y $x+3$ son factores de x^2+5x+6.

Factorar un monomio: los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección. Así los factores de $15ab$ son 3, 5, a y b por tanto $3.5ab$

Factorar un polinomio.

No todo polinomio se puede descomponer en dos o mas factores distintos de 1, del mismo modo que, en aritmética, hay números primos que solo son divisibles por ellos mismos y por 1, y por tanto, no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así $a+b$ no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque solo es divisible por $a+b$ y por 1.

Factores comunes a todos los términos.

Ejemplo 1: obtener M.F.C de $4x^3$, $6x^2$, $12x$

Solución : $4x^3 = 2^2x^3$

$6x^2 = 2.3x^2$

$12x = 2^2.3x$

Las bases comunes son 2 y x.

El mínimo exponente de 2 es 1 y el de x es 1.

Por consiguiente el M.F.C = $2^1 x^1 = 2x$

Ejemplo 2: obtener M.F.C de $9x^3y^2$, $12x^4y$, $-15x^5$

Solución : $9x^3y^2 = 3^2x^3y^2$

$12x^4y = 2^2.3x^4y$

$-15x^5 = -3.5x^5$

Bases comunes 3 y x

Mínimo exponente de 3 es 1 y de x es 3.

Por lo tanto el M.F.C = $3x^3$

Ejemplo 3: obtener M.F.C de $6a^4(x-y)^2$, $9a^3(x-y)^3$, $12a^2(x-y)^4$

Solución : $6a^4(x-y)^2 = 2.3a^4(x-y)^2$

$9a^3(x-y)^3 = 3^2a^3(x-y)^3$

$12a^2(x-y)^4 = 2^2.3a^2(x-y)^4$

Las bases comunes son 3, a, y $(x-y)$.

El mínimo exponente de 3 es 1, el de a es 1 y el de $(x-y)$ es 2.

Por tanto el M.F.C = $3a^2(x-y)^2$

Cuando los términos de un polinomio tienen un factor común, se emplea la ley distributiva $ab_1 + ab_2 + ab_3 + \ldots + ab_n = a(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$.

Para factorar un polinomio. Uno de los factores es el M.F.C de todos los términos del polinomio. El otro es el cociente, que se obtiene dividiendo cada término del polinomio por el factor común; esto es

$$ab_1 + ab_2 + ab_3 + \ldots + ab_n = a(\frac{ab_1}{a} + \frac{ab_2}{a} + \frac{ab_3}{a} + \ldots + \frac{ab_n}{a})$$

$$= a(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

Ejemplo 4: factorizar el polinomio $3a^2 - a$

Solución : Máximo factor común es a

$$3a^2 - a = a(\frac{3a^2}{a} - \frac{a}{a})$$

$$= a(3a-1) \quad \text{R/}$$

Ejemplo 5: factorizar $8x^3 - 4x^2 + 12x$

Solución : Máximo factor común es $4x$

$$8x^3 - 4x^2 + 12x = 4x(\frac{8x^3}{4x} - \frac{4x^2}{4x} + \frac{12x}{4x})$$

$$= 4x(2x^2 - x + 3) \quad \text{R/}$$

Ejemplo 6: factorizar $4x^2(2x-1) - 8x(2x-1)^2$

Solución : Máximo factor común es $4x(2x-1)$

$$4x^2(2x-1) - 8x(2x-1)^2 = 4x(2x-1)\left[\frac{4x^2(2x-1)}{4x(2x-1)} - \frac{8x(2x-1)^2}{4x(2x-1)}\right]$$

$$= 4x(2x-1)\left[x - 2(2x-1)\right]$$

$$= 4x(2x-1)[x-4x+2]$$

$$= 4x(2x-1)(2-3x) \qquad \text{R/}$$

Ejercicios 5

1) Aplicando la teoría de expuesta y tomando como base los ejemplos. encuentre el factor común; a los ejercicios siguientes:

a) x^3, x, x^2 ______________________

b) $6x^2, 9x^3, 12x$ ______________________

c) $15x^3, 25x^4, 30x^2$ ______________________

d) $12x^2y, 18x^2y, 6x^2$ ______________________

e) $6(x+2), 9(x+2)$ ______________________

f) $x(x+2)^2, x^2(x+2)$ ______________________

2) Factorice los siguientes polinomios.

a) $4x+4$ ______________________

b) $3x+9$ ______________________

c) $12x+6$ ______________________

d) $10x-5$ ______________________

e) $18x-27$ ______________________

f) $4x^2+4x$ ______________________

g) $5(x-4)-10(x-4)^2$ ______________________

h) $6(2x+1)^2-2(2x+1)$ ______________________

5.3 Factorización de un binomio.

Los métodos de factorización de polinomios se presentaran según el número de términos del polinomio que hay que factorizar. Un monomio es una forma factorizada, así que el primer tipo de polinomio que se considera es el binomio.

Cuadrados y raíces cuadradas.

Los cuadrados de los números 3, 5^2, 2/3, a, x^2, y, b^3 son respectivamente 3^2, 5^4, $2^2/3^2$, a^2, x^4, y^2, b^6.

Los números 3, 5^2, 2/3, a, x^2, y, b^3 se llaman raíces cuadradas de 3^2, 5^4, $2^2/3^2$, a^2, x^4, y^2, b^6, respectivamente.

La raíz cuadrada de un número a se denota por $\sqrt[2]{a}$. El símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina radical, el 2 que se incluye en el índice y el número a se llama radicando.

Cuando no se escribe ningún índice se supone que es 2.

Aunque los cuadrados de (+3) y (-3) son iguales a 9, cuando se hable de la raíz cuadrada de 9, nos referimos al número positivo 3 y no a (-3).

Definición: se dice que un número es un cuadrado perfecto si su raíz cuadrada es un número racional.

La raíz cuadrada de un número especifico puede encontrarse descomponiendo el número en sus factores primos, con sus respectivos, y luego dividir entre 2 a cada exponente de su potencia original (cuando se eleva un número al cuadrado multiplicamos su exponente por 2).

Ejemplos :

1) $\sqrt{64} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

2) $\sqrt{144} = \sqrt{2^4.3^2} = 2^2.3^1 = 12$

3) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{2^4}{5^2}} = \dfrac{2^2}{5} = \dfrac{4}{5}$

Definición : si a es un número literal y n ∈ N, se define $\sqrt{a^{2n}}$ como $(\sqrt{a})^{2n} = a^n$.
Si el exponente no es divisible por 2, el número no es cuadrado perfecto.

Ejemplos :

1) $\sqrt{a^4} = a^2$
2) $\sqrt{x^2y^6} = xy^3$
3) $\sqrt{4x^2y^4} = \sqrt{2^2x^2y^4} = 2xy^2$

Diferencia de cuadrados.

El producto de los factores $(a+b)$ y $(a-b)$ es a^2-b^2, es decir, la diferencia de dos términos cuadrados perfectos.
Los factores de una diferencia de cuadrados son la suma y diferencia de las raíces cuadradas respectivas de dichos cuadrados.

Ejemplo : Factorizar $9a^2-4$

Solución : Las raíz cuadrada de $9a^2$ es $3a$ y la de 4 es 2 por consiguiente $9a^2-4=(3a+2)(3a-2)$.

Nota : Recuerde factorizar el polinomio completamente.

Ejemplo : Factorizar completamente x^4-81y^4

Solución : $x^4-81y^4=(x^2+9y^2)(x^2-9y^2)$

$$=(x^2+9y^2)(x+3y)(x-3y)$$

Nota : Antes de verificar si el binomio es una diferencia de cuadrados, véase si hay algún factor. Este es el primer paso a efectuar.

Ejemplo : Factorizar completamente $6x^4-6$

Solución : $6x^4-6=6(x^4-1)$

$$=6(x^2+1)(x^2-1)$$

$$=6(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

Nota : $(a+b)(a-b)=(a-b)(a+b)$.

Ejemplo 1: Factorizar completamente $x^2-4(y-3)^2$

Solución : $x^2-4(y-3)^2=[x+2(y-3)][x-2(y-3)]$

$$=(x+2y-6)(x-2y+6)$$

Ejemplo 2: Factorizar completamente $(x-1)^3+y^2(1-x)$

Solución : $(x-1)^3+y^2(1-x)=(x-1)^3-y^2(x-1)$

$$=(x-1)\left[(x-1)^2-y^2\right]$$

$$(x-1)(x-1+y)(x-1-y)$$

Ejemplo 3: Factorizar completamente $x^2-\dfrac{9}{16}$

Solución : La raíz cuadrada de $\dfrac{9}{16}$ es $\dfrac{3}{4}$.

$$x^2 - \frac{9}{16} = (x + \frac{3}{4})(x - \frac{3}{4})$$

Ejercicios 5

Factorice completamente los siguientes polinomios.

1) $x^2 - 1$ ____________________

2) $x^2 - 16$ ____________________

3) $x^2 + 25$ ____________________

4) $4 - x^2$ ____________________

5) $9x^2 - 1$ ____________________

6) $16x^2 - 9$ ____________________

7) $9x^2 - 25y^2$ ____________________

8) $6x^2 + 24$ ____________________

9) $12x^2y^2 - 75a^2$ ____________________

10) $3x^4 - 48y^4$ ____________________

11) $(x+3)^2 - 4y^2$ ____________________

12) $x^2 - \frac{1}{9}$ ____________________

13) $x^2 - \frac{4}{25}$ ____________________

14) $49x^2 - \frac{16}{25}$ ____________________

15) $x^4 - \frac{16}{81}$ ____________________

5.4 Factorización de un trinomio.

La Factorización de los trinomios se divide en dos casos

1. El trinomio es de la forma $x^2 + bx + c, b, c \in Z; b \neq 0, c = 0$.
2. El trinomio tiene la forma $ax^2 + bx + c, a \neq 1, a, b, c \in Z; b = 0, c \neq 0$.

Trinomios de la forma

$x^2 - bx + c, b, c \in Z; b \neq 0, c \neq 0$

Consideremos los productos siguientes:

$$(x - m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$$

$$(x - m)(x - n) = x^2 + (-m - n)x + mn$$

$$(x - m)(x - n) = x^2 + (m - n)x - mn$$

$$(x - m)(x + n) = x^2 + (-m + n)x - mn$$

Se observan las siguientes relaciones entre los productos y sus factores:

1) El primer término de cada factor es la raíz cuadrada del término que aparece al cuadrado en el trinomio.
2) El producto de los segundos términos de los factores es el tercer término del trinomio.
3) La suma de los segundos términos, con sus respectivos signos, es el coeficiente del término central del trinomio.

Notas :

- Para encontrar los segundos términos de los factores, se buscan dos números cuyos productos sea el tercer término del trinomio y cuya suma sea el coeficiente del término central del trinomio.
- Cuando el signo del tercer término del trinomio es positivo los dos números tienen signos iguales al signo del término central del trinomio.
- Cuando el signo del tercer término del trinomio es negativo, los dos números tienen signos opuestos y el de mayor valor absoluto tiene el signo del término central del trinomio.

Ejemplo 1: Factorizar $x^2 + 8x + 15$

Solución : El primer término de cada factor es $\sqrt{x^2} = x$

Por consiguiente $x^2 + 8x + 15 = (x \quad)(x \quad)$

Como el signo del último término (+ 15) es positivo, los números que faltan en los factores deben tener el mismo signo dado que el signo del término central ($+8x$) es positivo, los dos números faltantes también deben serlo.

$$x^2 + 8x + 15 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Buscamos dos números naturales cuyo producto sea 15 y cuya suma sea 8, los números son 3 y 5.

Por tanto $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$

Ejemplo 2: Factorizar $x^2 - 10x + 24$

Solución : El primer término de cada factor es $\sqrt{x^2} = x$

Por consiguiente $x^2 - 10x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

Puesto que el signo del tercer término (+ 24) es positivo, los números faltantes en los factores deben tener signos iguales. Como el signo del término central (-$10x$) es negativo los números que faltan deben ser negativos.

$$x^2 - 10x + 24 = (x - \quad)(x - \quad)$$

Buscamos dos números cuyo producto sea 24 y cuya suma sea 10, los números son 4 y 6.

Por tanto $x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x-6)$

Ejemplo 3: Factorizar $x^2 - 5x - 36$

Solución : $x^2 - 5x - 36 = (x \quad)(x \quad)$

Como el signo del último término es negativo, los números faltantes en los factores tienen signos opuestos.

$$x^2 - 5x - 36 = (x + \quad)(x - \quad)$$

Dado que el signo del término central es negativo, el número de valor absoluto mayor debe tener signo negativo.

$$x^2 - 5x - 36 = (x + \text{ número menor })(x - \text{ número mayor })$$

Buscamos dos números naturales cuyo producto sea 36 y cuya diferencia sea 5. Los números son 4 y 9.

Entonces $x^2 - 5x - 36 = (x+4)(x-9)$

Ejemplo 4: Factorizar $x^2 + 3x - 28$.

Solución : $x^2+3x-28=(x\quad)(x\quad)$.

Como el signo del último término es negativo, los números faltantes en los factores tienen signos opuestos.

$$x^2+3x-28=(x+\quad)(x-\quad)$$

Como el signo del término central es positivo, el número mayor de valor absoluto debe tener signo positivo.

$$x^2+3x-28=(x+\text{ número mayor })(x-\text{ número menor })$$

Buscamos dos números cuyo producto sea 28 y cuya suma sea 3. Los números son 4 y 7.

Por consiguiente $x^2+3x-28=(x+7)(x-4)$.

Notas :

- Cuando el término del trinomio es un número grande y sus factores no son inmediatos, se escribe el número como producto de sus factores primos luego se analizan productos de factores formados con combinaciones de los primos.
- No todo polinomio es factorizable en el conjunto de los enteros; por ejemplo:

  a) x^2+2x+2

  b) x^2+3x+4

  c) x^2-x-8

Ejercicios 5

Haciendo uso de toda la teoría expuesta en este contenido.

factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

Factorice completamente los siguientes trinomios.

1) $x^2 + 3x + 2$ ______________________
2) $x^2 + 4x + 4$ ______________________
3) $x^2 + 11x + 30$ ______________________
4) $x^2 - 5x + 6$ ______________________
5) $x^2 - 12x + 3$ ______________________
6) $x^2 - 80 + 2x$ ______________________
7) $x^2 - 36 - 16x$ ______________________
8) $x^2 + 14xy + 48y^2$ ______________________
9) $x^2 + 9xy - 36y^2$ ______________________
10) $x^2 - 2xy - 63y^2$ ______________________
11) $5x^2 + 5x - 10$ ______________________
12) $ax^2 + 5ax + 6a$ ______________________
13) $x^3 - 12x^2 + 20x$ ______________________
14) $x^4 + 2x^3 - 8x^2$ ______________________
15) $3x^3 - 3x^2 - 18x$ ______________________

5.5 Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c \quad a \neq 1, a, b, c \in Z, b \neq 0, c \neq 0$

Consideré el producto

$$(2x+4)(x+3) = 2x^2 + 10x + 12$$

El primer factor de la izquierda contiene el factor común 2

$$2x^2 + 4 = 2(x+2)$$

También el producto desarrollado contiene el factor común 2

$$2x \quad + 10x + 12 = 2(x^2 + 5x + 6)$$

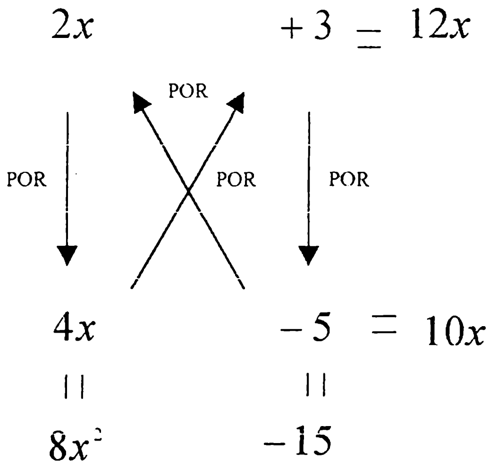
En general, si un factor de un producto contiene un factor común entonces el producto, entonces el producto desarrollado también contendrá.

Por otro lado, si ningún factor de un producto, por ejemplo $(x+5)(3x-2)$, contiene un factor común, entonces el producto desarrollado, en este caso $3x^2 + 13x - 10$, no tendrá factor común. Recíprocamente, si los términos de un producto no poseen un factor común, entonces tampoco lo tendrán ninguno de sus factores.

Para aprender a factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, veamos primeramente como se multiplican dos factores para obtener un producto de esta forma. Se multiplica $(2x+3)(4x-5)$

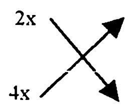
$$\begin{array}{lll}
2x + 3 & & \\
\underline{4x - 5} & & \\
8x^2 + 12x & & \\
\quad\;\; -10x - 15 & & \\
\hline
8x^2 + 2x - 15 & &
\end{array}$$

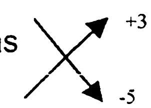
Examinaremos nuevamente esta multiplicación, como se muestra en la siguiente figura.



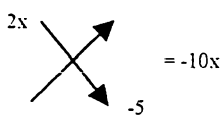
$$\begin{array}{r} 8x^2 + 12x \\ -10x - 15 \\ \hline 8x^2 + 2x - 15 \end{array}$$

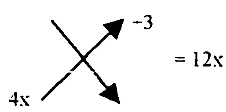
Las flechas cruzadas se denominan tijeras.

A la izquierda de las tijeras  son factores de $8x^2$, que es el primer termino del trinomio.

A la derecha de las tijeras  son factores de -15, que es el tercer termino del trinomio.

La suma de los productos en dirección de las flechas.





$$\begin{array}{r} -10x \\ -12x \\ \hline +2x \end{array}$$

$2x$ es el termino central del trinomio.

Nota : Cuando el trinomio tiene un factor común, este se determina antes de intentar factorizar con el método de las tijeras.

- Cuando el coeficiente del primero o tercer termino del trinomio, es numero grande, se escribe el número como el producto de sus factores primos, y se analizan productos de factores formados con combinaciones de los primos.

Ejemplo 1: Factorizar el trinomio $6x^2+19x+15$

Solución :

$$\begin{array}{cc} 2x & +3 \\ 3x & +5 \end{array}$$

$$+9x+10x=19x$$

$$6x^2+19x+15=(2x+3)(3x+5)$$

Ejemplo 2: Factorizar el trinomio $12x^2-45x+42$

Solución : Factor común de $12x^2-45x+42$ es 3

entonces $12x^2-45x+42=3(4x^2-15x+14)$

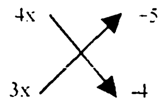
$$\begin{array}{cc} 4x & -7 \\ x & -2 \end{array}$$

$$-7x-8x=15x$$

Por consiguiente $12x^2-45x+42=(4x-7)(x-2)$

Ejemplo 3: Factorizar el trinomio $12x^2-x-20$

Solución :

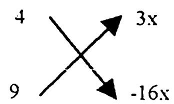


$+15x-16x=-x$

Por tanto $\quad 12x^2-x-20=(4x+5)(3x-4)$

Ejemplo 4: Factorizar $36-37x-48x^2$

Solución :

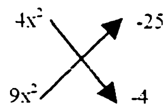


$+27x-64x=-37x$

Por consiguiente $\quad 36-37x-48x^2=(4+3x)(9-16x)$

Ejemplo 5: Factorizar $36x^4-241x^2+100$

Solución :



$-16x^2-225x^2=-241x^2$

Por tanto
$$\begin{aligned}36x^4-241x^2+100&=(4x^2-25)(9x^2-4)\\&=(2x+5)(2x-5)(3x+2)(3x-2)\end{aligned}$$

Ejemplo 6: Factorizar $2(x-y)^2-5(x-y)-12$

Solución : $2(x-y)^2-5(x-y)-12$ es de la forma $2a^2-5a-12$ cuyos factores son $(2a+3)(a+4)$

Por lo tanto $2(x-y)^2-5(x-y)-12=[2(x-y)+3][(x-y)-4]$

$$=(2x-2y+3)(x-y-4)$$

Nota : No todo trinomio es factorízable en el conjunto de los números enteros; por ejemplo:

1) $3x^2-4x-6$
2) $4x^2-8x-3$
3) $6x^2+5x+2$

Ejercicios 5.5

Factorice completamente los siguientes trinomios.

1) $2x^2+3x+1$

2) $3x^2+13x+15$

3) $3x^2-4x+1$

4) $4x^2-9x+2$

5) $2x^2-13x-7$

6) $2x^4+7x^2+3$

7) $18x^4-29x^2+3$

8) $81x^4-18x^2+1$

9) $16x^4-72x^2+81$

10) $3(x+y)^2+10(x+y)+3$

11) $4(x-y)^2+9(x-y)+2$

12) $6(2x-y)^2-25(2x-y)+4$

13) $2(x+y)^2-3(x+y)+1$

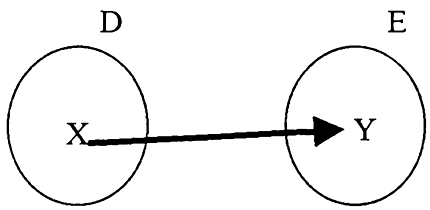
14) $36(x-y)^2+5(x-y)-24$

15) $12(x-3y)^2-5(x-3y)-3$

6. Relaciones y Funciones.

Frecuentemente nos encontramos en la vida diaria con la noción de correspondencia.

Por ejemplo, a cada libro de corresponde un cierto número de paginas. A cada persona le corresponde una fecha de cumpleaños. Si se mide la temperatura ambiental durante un día, entonces, a cada instante le corresponde una temperatura. En los ejemplos de correspondencia que hemos citado, hay dos conjuntos: D y E. En el primero de los ejemplos, D denota el conjunto de libros, y E el conjunto de enteros positivos. A cada libro X en D le corresponde un entero positivo "Y" en E, que es el número de paginas. La correspondencia se representa mediante diagramas.



En donde los conjuntos D y E se representan por medio de puntos dentro de las regiones de un plano. La flecha indica que el elemento de X de D le corresponde el elemento "Y" de E, se ha considerado diferentes a los conjuntos X y Y. Sin embargo. los dos conjuntos pueden tener elementos en común, y más aún es factible que D = E.

Los ejemplos mencionados indican que a cada X en D le corresponde una y solo una Y en E; es decir para una X dada, Y es única. Sin embargo, diferentes elementos de D pueden estar asociados en un mismo elemento de E. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de paginas o dos personas, idéntica fecha de cumpleaños.

En este caso D y E serán conjuntos numéricos en la mayoría de los casos. Como ejemplo, supongamos que D y E son el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y que a cada número real X le corresponde su cuadrado X^2, es decir, al 3, -5 y $\sqrt{2}$ se le asocian los números 9, 25 y 2, respectivamente.

Esto determina una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Cada uno de los ejemplos de correspondencia que hemos visto es una función la cual se define de la siguiente manera.

Definición: una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento X de D un único elemento "Y" de E.

Relaciones y Funciones.

221-0796, es el número telefónico de Rubén.
Carlos es amigo de Juan.
Pedro es hermano de Silvia
5 es mayor que 3.
San Salvador es más grande que Santa Tecla.
4 es el inverso multiplicativo de ¼.

Es el numero de teléfono de
Es amigo de
Es hermano de
Es mayor que
Es más grande que
Es el inverso multiplicativo de

Son palabras que vinculan a una cantidad con otra.

Tales frases se llaman Relaciones.

A veces se aplican entre elementos del mismo conjunto ($4, 1/4 \in \mathbb{R}$); y a veces no.

Generalmente usamos la letra mayúscula "R" para representar una relación.

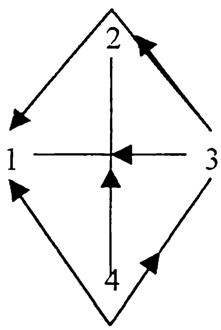
6.1 Diagramas

Las relaciones pueden representarse por una variedad de diagramas.

Relaciones entre elementos del mismo conjunto pueden representarse por el diagrama de flechas que se da a continuación.

A. Diagrama de flechas #1.

Ejemplo 1. representar la relación "es mayor que" entre los elementos. {1,2,3,4}.



El símbolo  ≡ " es mayor que "

Cuando la relación no es entre elementos del mismo conjunto se usa otra forma de diagramas de flechas que se da a continuación.

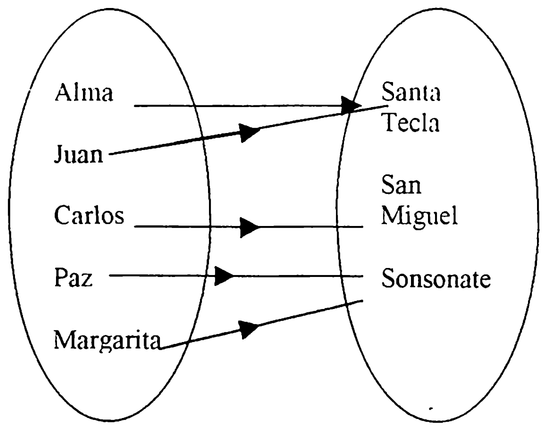
B. Diagrama de flechas #2.

Ejemplo 2.

La relación " vive en la ciudad " se aplica entre los elementos de los conjuntos.

Alma, Juan, Carlos, Paz, Margarita y San Miguel, Santa Tecla, Sonsonate.

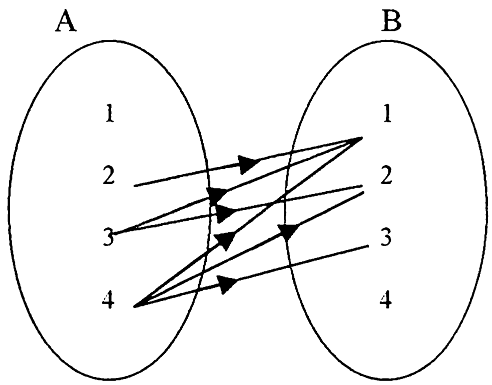
Así:



Alma y Juan viven en Santa Tecla.

Carlos vive en San Miguel, Paz y Margarita viven en Sonsonate.

Este diagrama también puede usarse para relaciones entre elementos del mismo conjunto. En el ejemplo #1 tenemos:



El diagrama nos muestra que en la relación participan los elementos 2, 3,4 del conjunto A y 1, 2, 3 del conjunto B.

Damos nombres a los conjuntos así:

El conjunto A se llama Alcance o conjunto de partida

A = { 1, 2, 3, 4 }

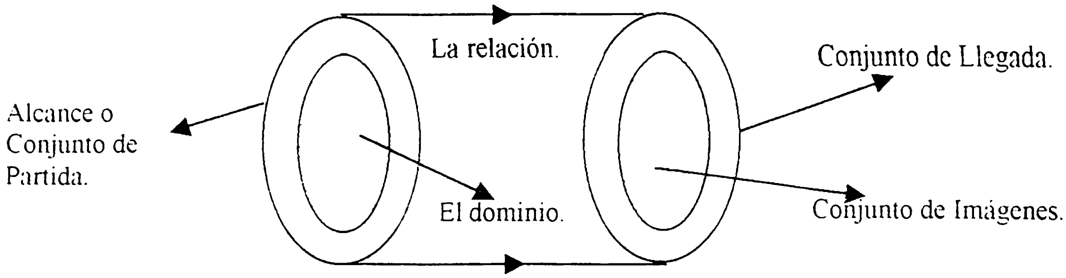
El subconjunto del alcance que contiene los elementos de los cuales parten las flechas se llama Dominio.

En este caso { 2, 3, 4 }

B se llama el conjunto de llegada.

B = { 1, 2, 3, 4 }

El subconjunto de conjunto de llegada formado por los elementos a los cuales llegan las flechas, se llaman el conjunto de imágenes. En este caso { 1, 2, 3 } y se representa así:



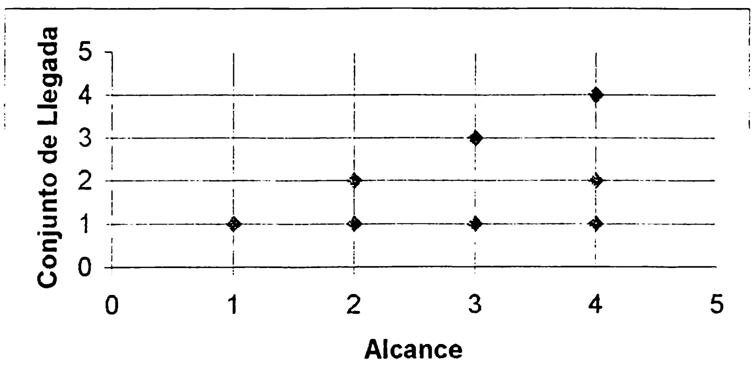
C. Diagrama Cartesiano.

En este tipo de diagramas tomamos 2 ejes que por lo general, se cortan en ángulo de 90°.

En el eje horizontal colocamos los elementos del ALCANCE y en el eje vertical, los elementos del conjunto de llegada.

Ejemplo 3.

Dibujar el diagrama cartesiano que representa la relación " es múltiplo de " entre los elementos de { 1, 2, 3, 4 }



6.2 GRÁFO DE UNA RELACION.

El diagrama del ejemplo 3 muestra la relación " es múltiplo de ".

Vemos que

1 es múltiple de 1. etc.

Si representamos las palabras " es múltiplo de " por la letra **R**, entonces podemos escribir 1 **R** 1.

Si aplicamos este tipo de vinculo a todos los elementos del diagrama, obtenemos : 1 **R** 1, 2 **R** 1, 2 **R** 2, 3 **R** 1, 3 **R** 3, 4 **R** 1, 4 **R** 2, 4 **R** 4.

En cada caso, el resultado produce un par ordenado por ejemplo:

3 **R** 1 produce el par ordenado (3,1); entonces todos los resultados pueden representarse por pares ordenados que vienen a integrar el conjunto:

{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

que se llama el gráfo de la relación **R.**

La notación que ocupamos para el gráfo es

G_R = {(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

Ejemplo 4

Encontrar el gráfo de la (**R**) " es mayor que " entre los elementos {1, 2, 3, 4}

G_R = {(2,1), (3,2), (3,1), (4,3), (4,2), (4,1)}

Ejercicios 6

Empleando definiciones y siguiendo pasos de los ejemplos anteriores desarrolle los siguientes ejercicios.

1) Escriba el dominio y rango de cada relación **R** cuyos gráfos son

   (i) G_R = {(1,2), (3,4), (3,5), (4,4)}

   (ii) G_R = {(1/4,4), (1/3,3), (1/2,2), (1,1)}

2) Para cada gráfo de la primera pregunta dibuje los diagramas siguientes

   (i) Diagrama de flechas #1

   (ii) Diagrama de flechas #2

   (iii) El diagrama cartesiano

3) Juan y Roberto son hijos del Sr. Sandoval; Sr. Villacorta es padre de Alberto.

   (i) Dibuje el diagrama de flechas #1, para la relación " es hijo de "

   (ii) Obtenga el gráfo de la relación.

4) $A = \{4, 3, -1/4, -1/3\}$

   $B = \{-4, -3, 1/4, 1/3\}$

   a) $\mathbf{R}$, es la relación " es el inverso multiplicativo de "

   (i) Encuentre G_R.

   (ii) Dibuje el diagrama de flechas #2.

   b) $\mathbf{R}_2$, es la relación " es el inverso aditivo de "

   (i) Encuentre $G_{R\,2}$.

   (ii) Dibuje el diagrama de flechas #2.

5) $\mathbf{R}$ es la relación " es el doble de " entre los elementos de $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

   (i) Encuentre G_R.

   (ii) Dibuje el diagrama de cartesiano $\mathbf{R}$.

6) $X \in$ dominio de la relación $\mathbf{R}$

   $Y \in$ conjunto de imágenes

   $\mathbf{R}$ es la relación " es menor que " (<)

   [entonces sabemos que $X < Y$]

   $\mathbf{R} : A \longrightarrow {}_A$ donde $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(i) Dibuje el diagrama Cartesiano.

(ii) ¿Cuál es el dominio?

(iii) ¿Cuál el conjunto de imágenes?

7) Una relación **R** es tal que.

$G_R = \{ (x, y); y = 2x \}$

La relación **R** se da entre los elementos de { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

a)Encuentre

(i) G_R.

(ii) El diagrama cartesiano.

b)Escriba en palabras la relación **R.**

7. Relaciones de Coordenadas en dos Dimensiones.

Se pueden aplicar sistemas coordenados a un plano mediante pares ordenados. El término de par ordenado se refiere a dos números reales, uno se designa "primer" número y el otro "segundo" número. El símbolo (a, b) se emplea para denotar el par ordenado que consta de dos números reales a y b, en donde a es el primer número y b es el segundo número. Los pares ordenados tienen muchos usos. En este caso representaran puntos en un plano. Aunque los pares ordenados se emplean en situaciones diferentes, es difícil confundirse, puesto que en general el contexto indica claramente si el símbolo (a, b) representa un intervalo, en un punto, u otro término matemático. Consideramos que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales cuando.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y solo si } a = c \text{ y } b = d$$

esto, implica que $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$.

Para formar un sistema coordenado rectangular, o cartesiano. se consideran dos rectas coordenadas perpendiculares entre si, que se cortan en el origen O (cero) de ambos.

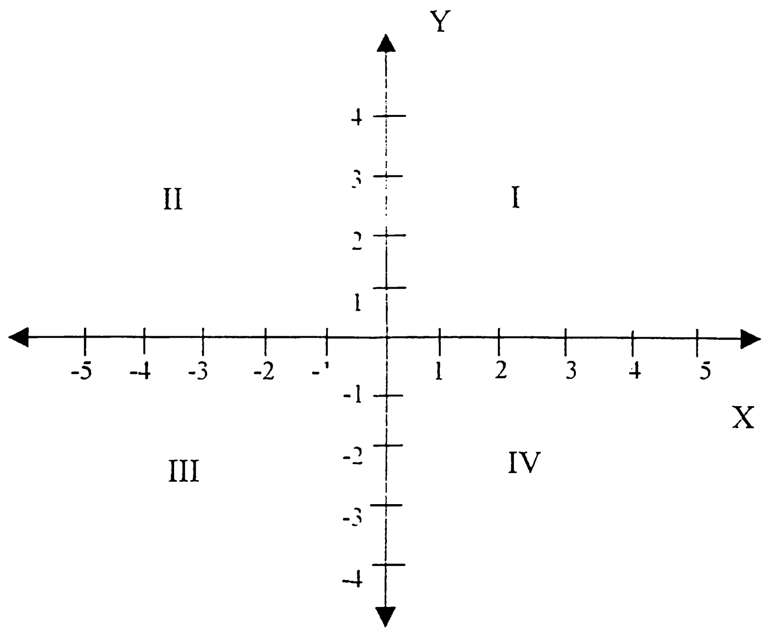
Se elige la misma unidad de longitud en cada recta, a menos que se especifique lo contrario. Usualmente una de las rectas es horizontal con dirección positiva hacia la derecha y la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba. Las dos rectas se llaman ejes coordenados y el punto O(cero) es considerado como el origen. Más específicamente, a la recta horizontal la consideraremos como el eje X, y a la recta vertical como el eje "Y", y las designamos por X y Y, respectivamente.

El obtenido se llama Plano Coordenado.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes que se designan por I, II, III, IV, respectivamente. A cada punto P de un plano XY se le designa un único par ordenado (a, b) los números a y b se llaman abscisa (o coordenada X) y ordenada (o coordenada y) de P, respectivamente. A veces decimos que P tiene coordenadas (a, b). Recíprocamente, cada par ordenado (a, b) determinan un punto P con coordenadas a y b en el plano XY. A menudo, cuando nos referimos al punto (a, b) o P(a, b), queremos decir el punto P cuya coordenadas "X" es a y cuya coordenada "y" es b. Ubicar un punto P(a, b) significa localizar a P en un plano coordenado y representado mediante un punto.

División del plano en cuatro partes llamadas primero, segundo. tercero y cuarto cuadrante.

i)



A cada punto P de un plano XY se le asigna un único par ordenado (a, b).

ii)

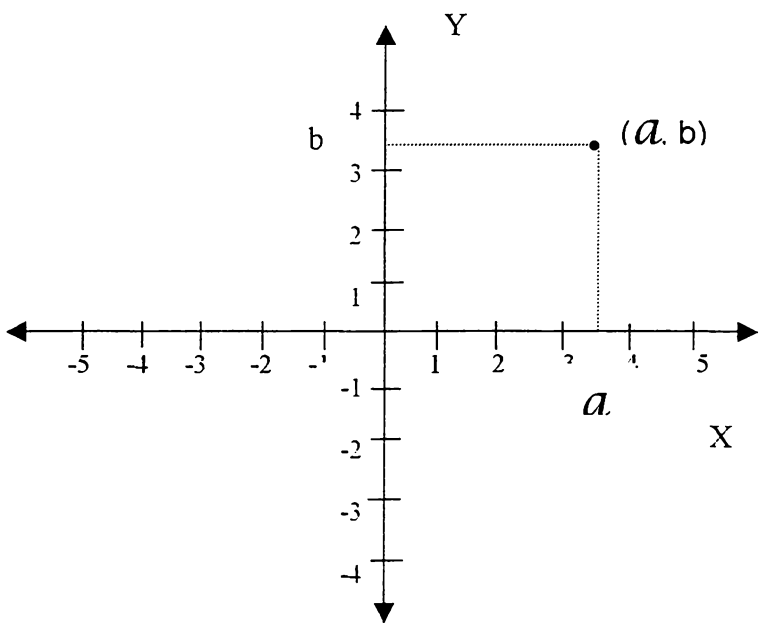
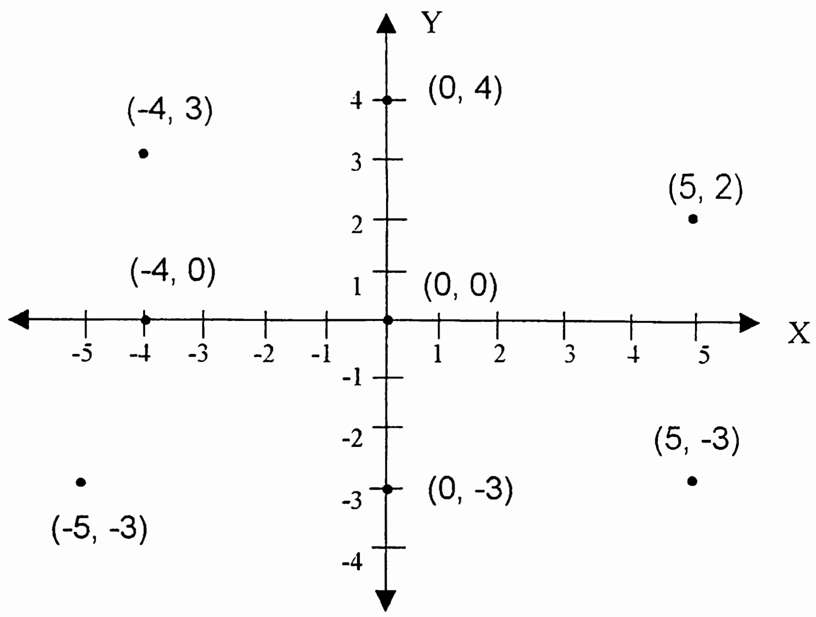
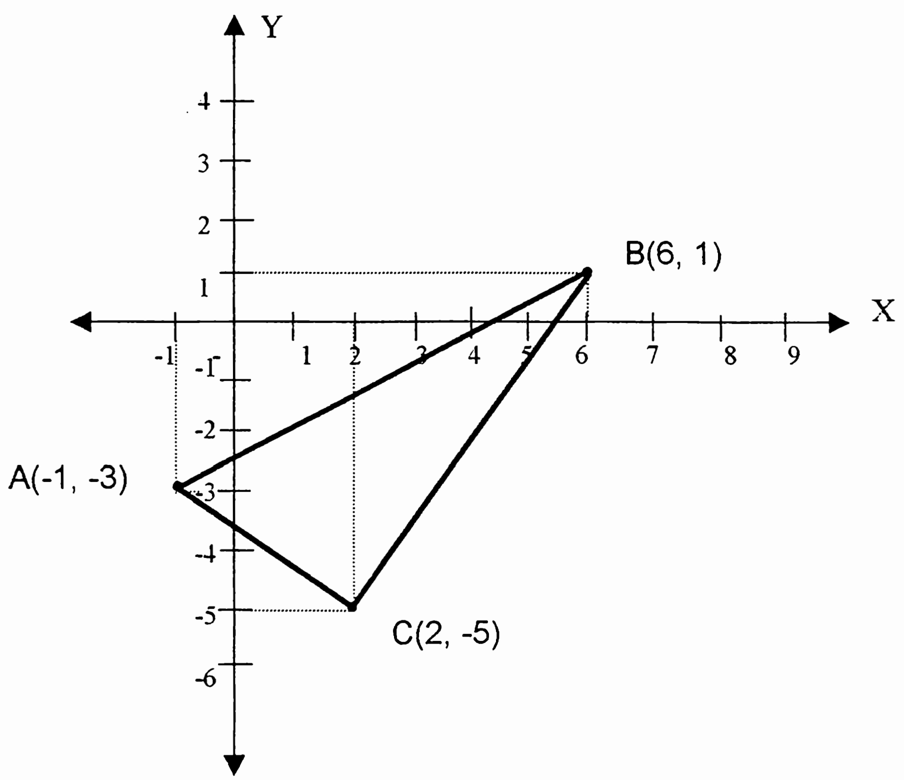


Ilustración de algunos puntos formados por (a, b).

iii)



Ejemplo: representar los puntos A(-1, -3), B(6, 1) y C(2, -5).



Ejercicios 2.7

Aplicando los conocimientos adquiridos de este contenido efectué los siguientes ejercicios.

1) Represente los siguientes puntos en un sistema coordenado rectangular: A(5, -2), B(-5, -2), C(5, 2), D(-5, 2), E(3, 0), F(0, 3).

2) Represente los puntos A(-3, 1), B(3, 1), C(-2, -3), D(0, 3) y E(2, -3) en un sistema coordenado rectangular y trace los segmentos de recta AB, BC, CD, DE Y EA.

3) Represente los puntos A(0, 0), B(1, 1), C(3, 3), D(-1, -1) y E(-2, -2). Describa el conjunto de todos los puntos de la forma (X, X) donde X es un número real.

4) Represente los puntos A(0, 0), B(1, -1), C(2, -2), D(-1, -1) y E(-3, 3). Describa el conjunto de todos los puntos de la forma (a, -a) donde a es un número real.

5) Describa en un plano cartesiano el conjunto de todos los puntos P(X, Y) tales que:

   a) $x = 3$ b) $y = -1$

   c) $x \geq 0$ d) $xy > 0$

   e) $y < 0$

6) Describa en un plano cartesiano el conjunto de todos los puntos P(X, Y) tales que:

   a) $y = 0$ b) $x = -5$

   c) $x/y < 0$ d) $xy = 0$

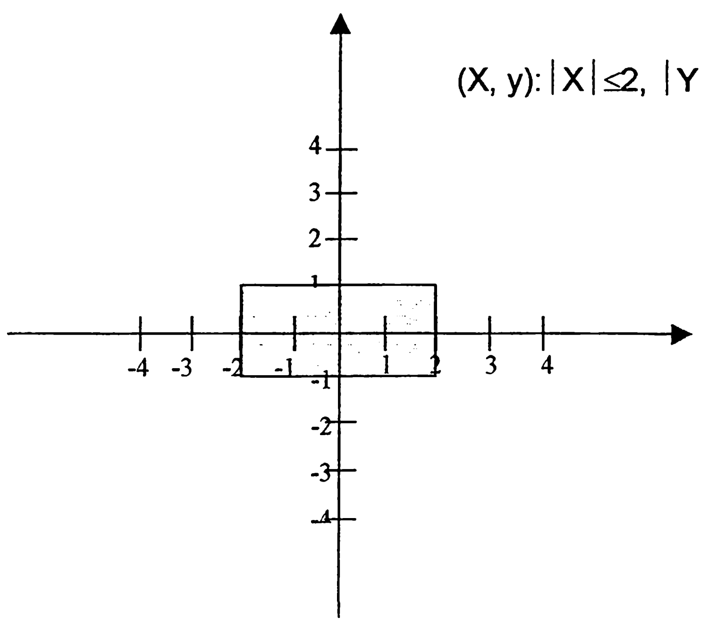
   e) $y > 1$

8. Gráficos.

Si A es un conjunto de pares ordenados, se puede considerar al punto P(X, Y) de un plano coordenado que corresponda al par ordenado (X, y) en A. La gráfica de A es el conjunto de todos esos puntos. La frase " trazar la gráfica de A " significa ilustrar geométricamente en un plano coordenado las características relevantes de la gráfica.

Ejemplo 1. Trazar la gráfica de $A = \{ (X, Y): |X| \leq 2, |Y| \leq 1 \}$

Solución: La notación que describe a A se traduce por " el conjunto de todos los pares ordenados (X, Y) tales que $|X| \leq 2$ y $|Y| \leq 1$. " Estas desigualdades son equivalentes a $-2 \leq X \leq 2$ y $-1 \leq Y \leq 1$. Por lo tanto la gráfica de A consiste en todos los puntos comprendidos dentro y sobre la frontera de la región rectangular que se muestra en la siguiente gráfica.



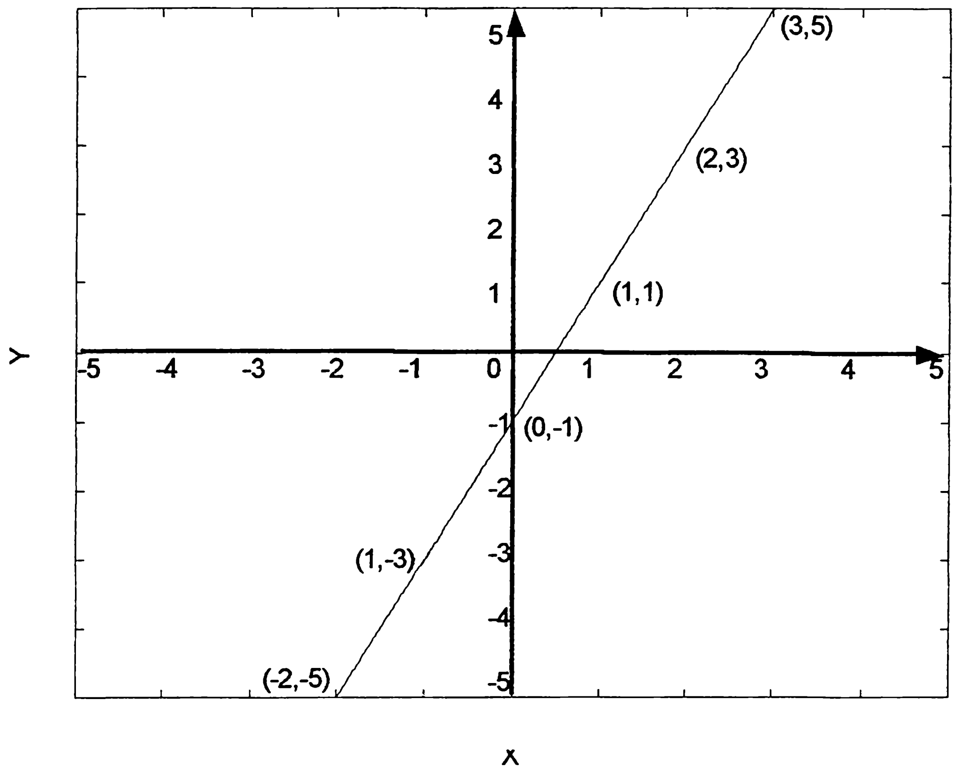
Ejemplo 2. En este ejemplo se trata de trazar la gráfica de B = { (X, Y): Y = 2X-1}

Solución: Empezamos por encontrar algunos puntos con coordenadas (X, Y) este en B. Conviene tabular estas coordenadas como se muestra a continuación, de manera que el valor de Y correspondiente al número real X sea igual a 2X-1.

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-5	-3	-1	1	3	5

Después de marcar los puntos con estas coordenadas, nos damos cuenta que todos están sobre una recta y trazamos la gráfica de acuerdo con esta observación. En general los pocos puntos que representamos no serian suficientes para esbozar la gráfica; sin embargo, en este caso sencillo podemos estar seguros de que la gráfica es una recta.

Y = 2x -1



Las coordenadas X de los puntos en los que la gráfica corta el eje X se conoce como intercepciones X de la gráfica.

Las coordenadas Y de los puntos en los que la gráfica corta el eje Y se conocen como intercepciones Y en la gráfica anterior tiene como intercepción X, ½ y como intercepción Y, -1.

Es imposible trazar la gráfica completa del ejemplo anterior ya que X puede tomar valores tan grandes como se desee.

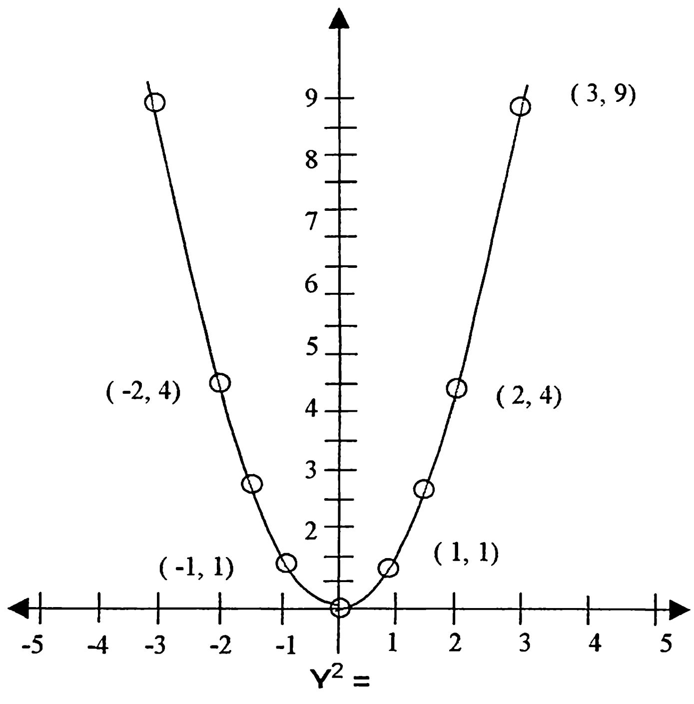
En general la gráfica debe ilustrar una parte suficientemente grande de manera que las partes restantes sean evidentes.

Para algunas ecuaciones la técnica que se empleará para obtener la gráfica consistirá en representar tantos puntos como sea necesario hasta tener la idea clara de la forma de la curva. Es claro que esta no es la manera más adecuada de obtener la gráfica; sin embargo, este método se usa con frecuencia. Para dar una descripción aproximada de las gráficas de ecuaciones complicadas, generalmente es necesario emplear técnicas más avanzadas, que se estudian en los cursos de cálculo.

Ejemplo 3. Trazar la gráfica de la ecuación $Y = X^2$.

Solución: Para trazar la gráfica debemos situar más puntos que el ejemplo anterior. Aumentando las coordenadas X sucesivas en ½, se obtiene la siguiente tabla.

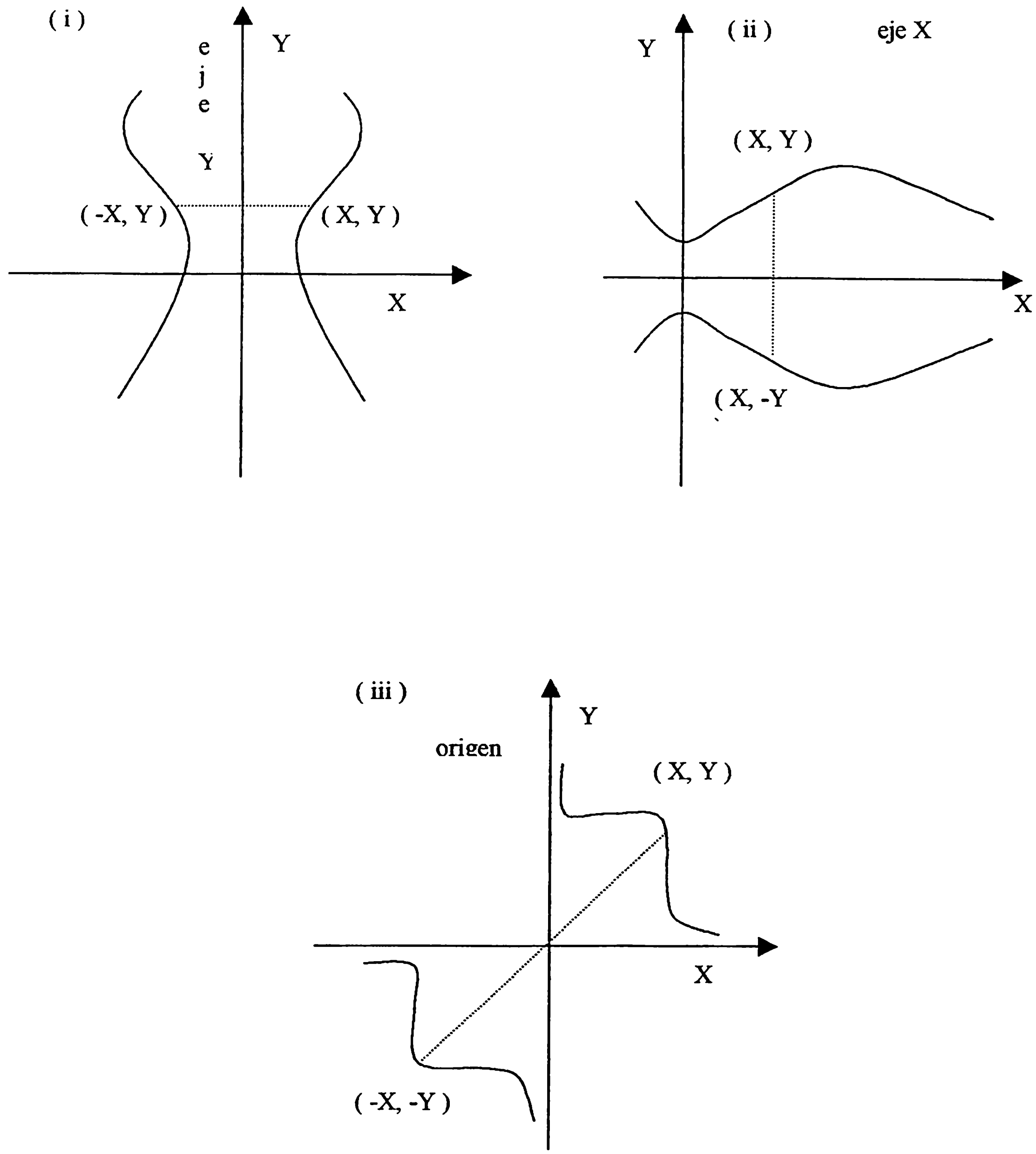
X	-3	-5/2	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
Y	9	25/4	4	9/4	1	1/4	0	1/4	1	9/4	4	25/4	9



Al crecer los valores de X, crecen aún más los valores de Y. Por ejemplo, los puntos (4, 16), (5, 25) y (6, 36) pertenecen a la gráfica, así como también los (-4, 16), (-5, 25) y (-6, 36). Al representar y unir mediante una curva aislada estos puntos obtenemos la figura anterior en donde marcamos varios puntos.

En la gráfica anterior recibe el nombre de Parábola. El eje Y se llama eje de la parábola, el punto inferior (0, 0) es conocido como vértice de la parábola y decimos que la parábola se abre hacia arriba. Si la gráfica estuviese invertida, como sería el caso de $Y = 0 - x^2$, entonces la parábola abriría hacia abajo y el vértice (0,0) sería el punto más alto de la gráfica. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $Y = aX^2$, para $a \neq 0$, es una parábola con vértice (0, 0). Las parábolas pueden abrir hacia la derecha o hacia la izquierda.

Si el plano coordenado se dobla a lo largo del eje "Y", entonces la mitad de la gráfica del lado izquierdo coincide con la mitad de la derecha. Decimos que la gráfica es simétrica con respecto al eje Y.



La gráfica (i) es simétrica con respecto al eje Y, ya que el punto (-X, Y) pertenece a la gráfica siempre que (X, Y) esté en la curva. De manera analógica, una gráfica es simétrica con respecto al eje X si, siempre que el punto (X, Y) está en la gráfica, entonces el punto (X, -Y) pertenece también a la curva, como se muestra en la figura (ii).

Otro tipo de simetría que ciertas gráficas poseen es la llamada simetría con respecto al origen, en este caso, siempre que un punto (X, Y) este en la curva entonces el punto (-X, -Y) también esta en la gráfica como se ilustra en (iii).

La investigación de estos tres tipos de simetría se lleva a cabo mediante las siguientes pruebas para gráficas de ecuaciones X y Y.

8.1 Pruebas de Simetría.

i) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje Y si la sustitución de X por –X da una ecuación equivalente.

ii) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje X si la sustitución de Y por –Y da una ecuación equivalente.

iii) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen si la sustitución de X por –X y de Y por –Y da una ecuación equivalente.

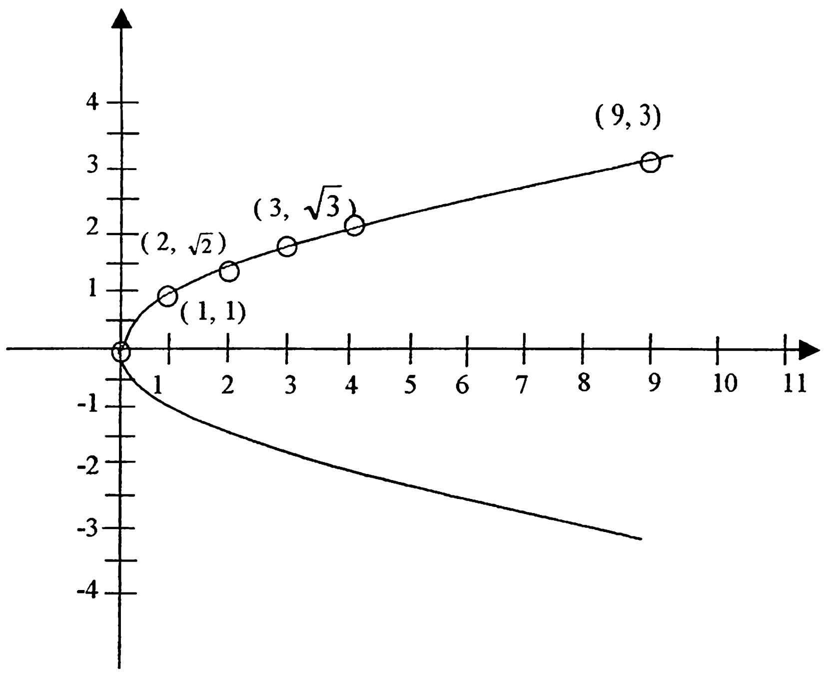
Si existe simetría con respecto a uno de los ejes, basta determinar la gráfica en una mitad del plano coordenado, ya que el resto de la curva puede trazarse como una reflexión en espejo de la primera mitad.

Ejemplo 4. Trazar la gráfica de la ecuación $Y^2 = X$.

Solución: La gráfica es simétrica con respecto al eje X ya que la ecuación no cambia al sustituir Y por –Y. Esto se muestra en la prueba de simetría (ii). Por consiguiente, es suficiente representar puntos con ordenadas no negativas y luego reflejarla con respecto al eje X.

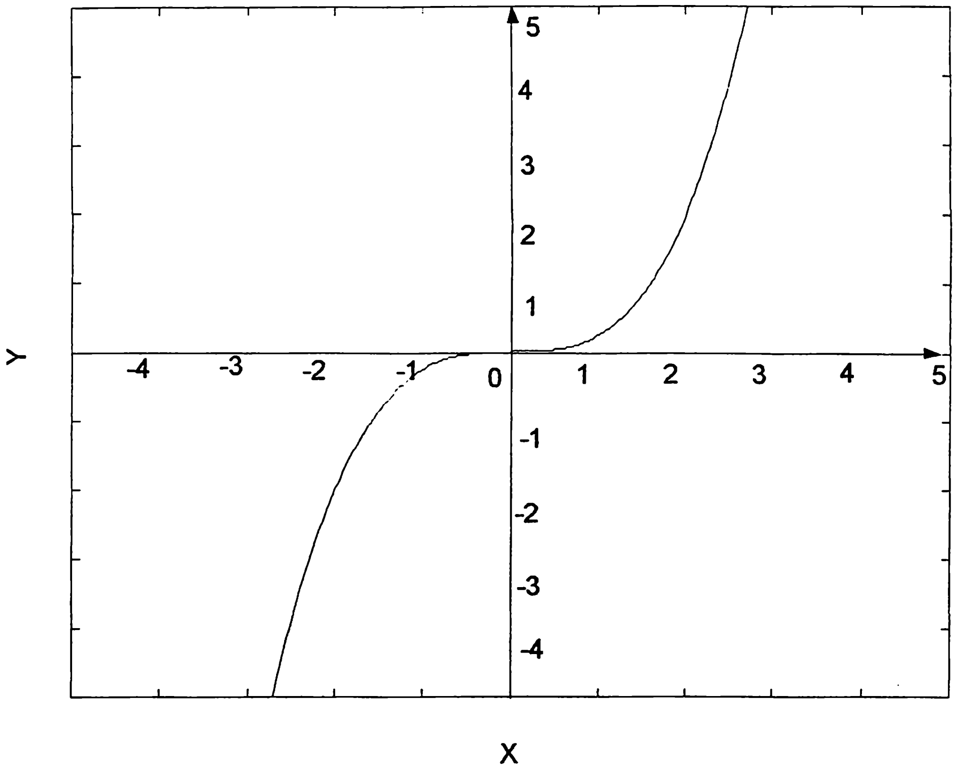
Las ordenadas de los puntos que están por encima del eje X están dadas por $Y = \sqrt{X}$ ya que la ecuación que se tiene es $Y^2 = X$. Las coordenadas de algunos puntos se dan en la siguiente tabla.

X	0	1	2	3	4	9
Y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3



Trazar la gráfica de la ecuación $4Y = x^3$

X	0	1/2	1	3/2	2	5/2
Y	0	1/32	1/4	27/32	2	25/32



Y
X
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

UNIDAD III: Funciones Especiales

1 Funciones Lineales

El siguiente tipo de función es de gran importancia en matemáticas y sus aplicaciones.

Definición: f es una función lineal si $f_{(x)} = ax + b$ en donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Se utiliza el término "lineal" porque la gráfica de f es una línea recta, como lo veremos posteriormente. Primero, se presentarán algunos conceptos fundamentales sobre líneas rectas. Todas las rectas a los que nos referimos están en el plano cartesiano.

Definición: Sean l una línea recta no paralela al eje "y" y P'_1 (X'_1, Y'_1), P'_2 (X'_2, Y'_2) dos puntos diferentes de l. La pendiente **m** de l se define por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si l es posible al eje Y, su pendiente no está definida.

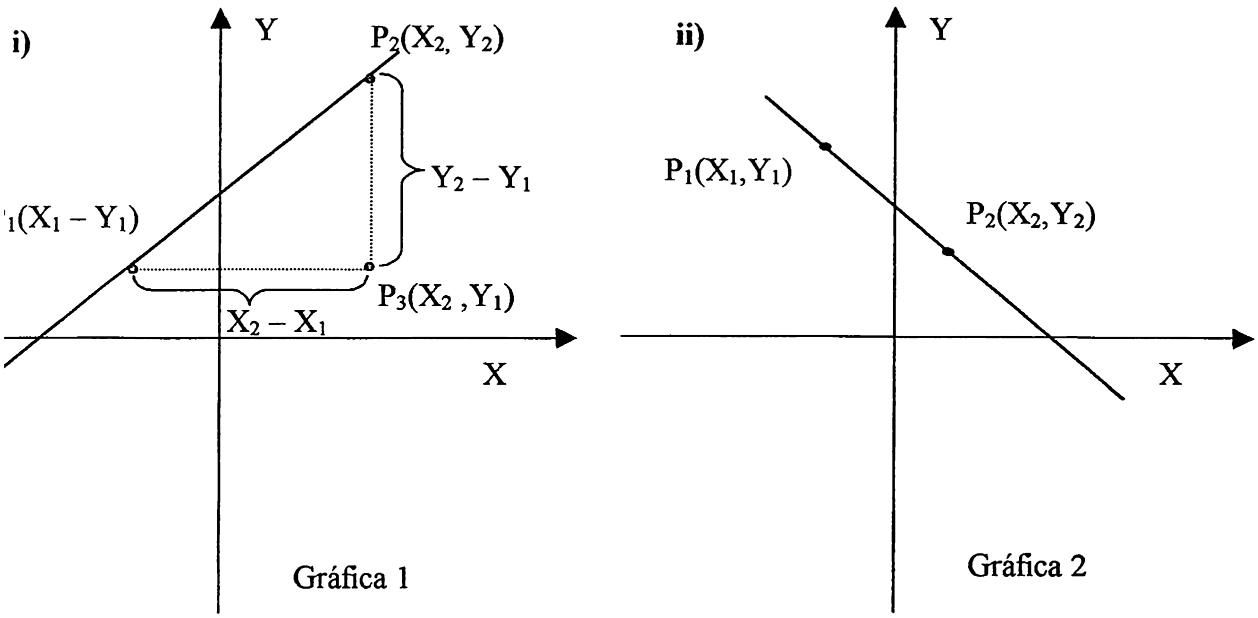
Puntos típicos P_1 y P_2 de una recta l, se dan en la siguiente figura. El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para m, mide el cambio en la dirección vertical al pasar de P_1 a P_2 y puede ser negativo, positivo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ mide el cambio horizontal al ir de P_1 a P_2 el denominador puede ser positivo o negativo pero nunca cero, debido a que l no es paralela al eje Y. Se tiene que.

$$\text{Pendiente de } l = \frac{\text{Desnivel de } P_1 \text{ a } P_2}{\text{Corrimiento de } P_1 \text{ a } P_2}$$

Para obtener la pendiente de una recta, no importa a cuál de los puntos consideramos como P_1 y a cuál como P_2 ya que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

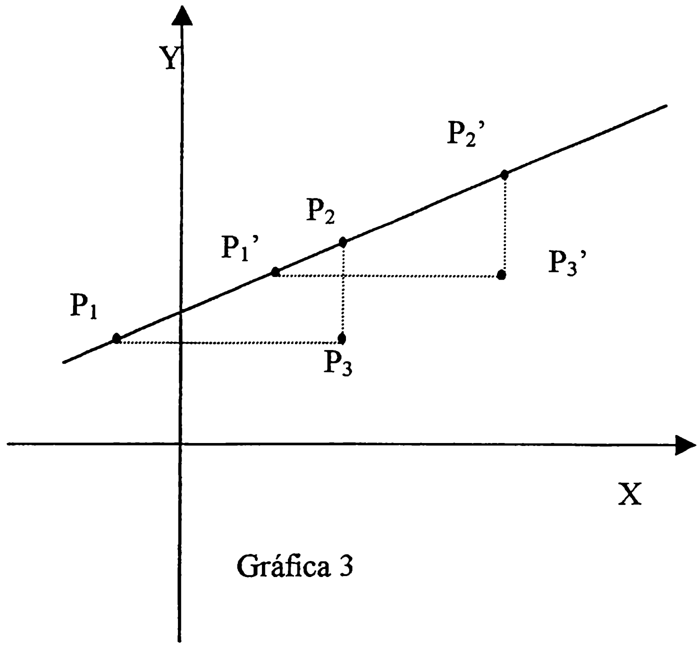
En consecuencia podemos suponer que los puntos están numerados de manera que $X_1 < X_2$, como se mostrara en la siguiente figura. En este caso, $X_2 - X_1 > 0$ y por lo tanto la pendiente es positiva, negativa o cero si $Y_2 > Y_1$ $Y_2 < Y_1$ o bien $Y_2 = Y_1$, respectivamente. La pendiente de la recta que se muestra en (i) es positiva mientras que la de (ii) es negativa.



Una recta horizontal es una paralela al eje X. Nótese que una recta es horizontal si y sólo si su pendiente es cero. Una recta vertical es una paralela al eje Y. La pendiente de una recta vertical no esta definida.

Es importante notar que la definición de una pendiente no depende de los dos puntos que se eligen sobre l, ya que si se usan otros puntos P_1 (X_1,Y_1), P_2 (X_2,Y_2) entonces como se ve en la siguiente figura, el triángulo con vértices P_1, P_2 y P_3 (X_2,Y_1), es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2, y P_3 (x_2 , y_1 .) Como los lados de ambos triángulos son proporcionales, concluimos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

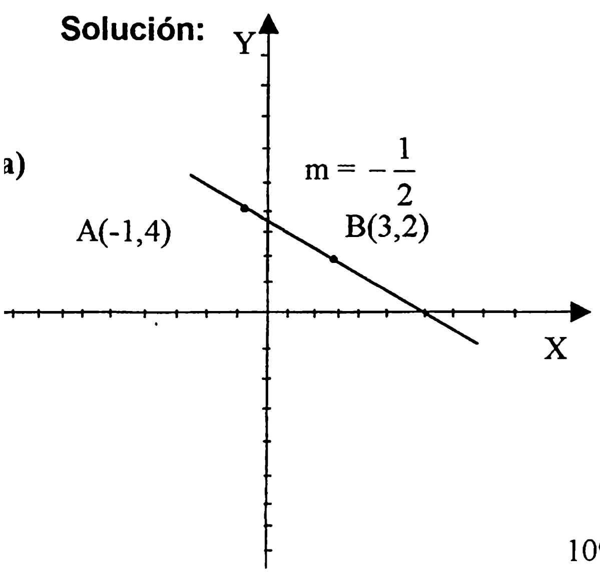


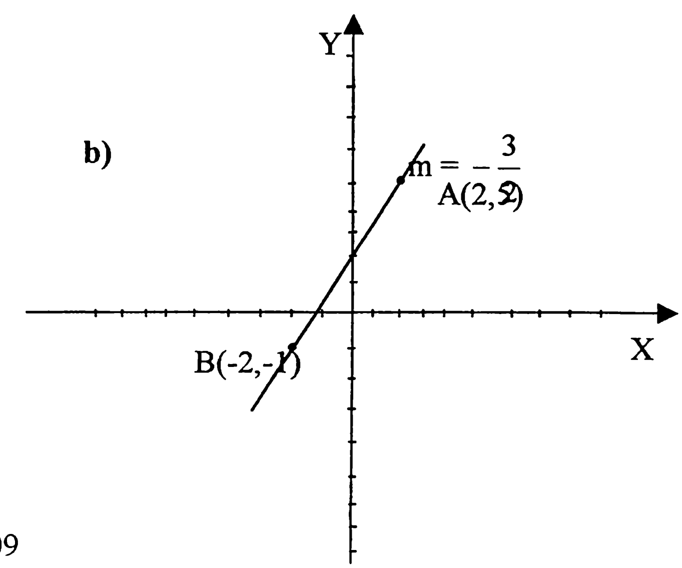
Gráfica 3

Ejemplo 1. Trazar las rectas que pasan por los puntos siguientes y encontrar sus pendientes.

a) A(-1,4) y B(3,2)
b) A(2,5) y B(-2,-1)
c) A(4,3) y B(-2,3)
d) A(4,-1) y B(4,4)

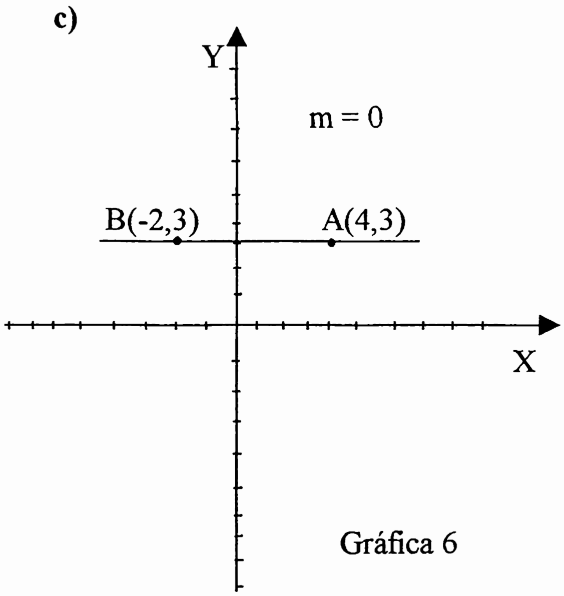
Solución:



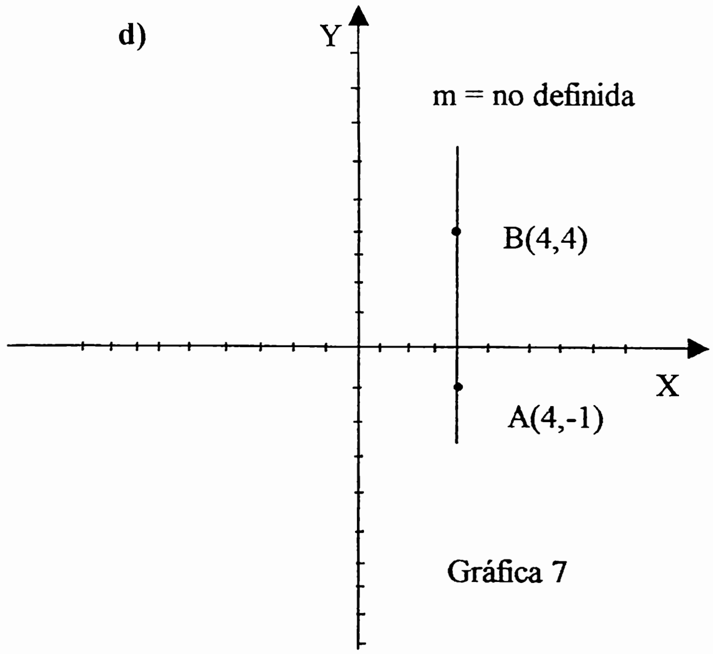


Gráfica 4

Gráfica 5



Gráfica 6



Gráfica 7

Por definición de pendiente:

a) $m = \dfrac{2-4}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

b) $m = \dfrac{5-(-1)}{2-(-2)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

c) $m = \dfrac{3-3}{-2-4} = \dfrac{0}{6} = 0$

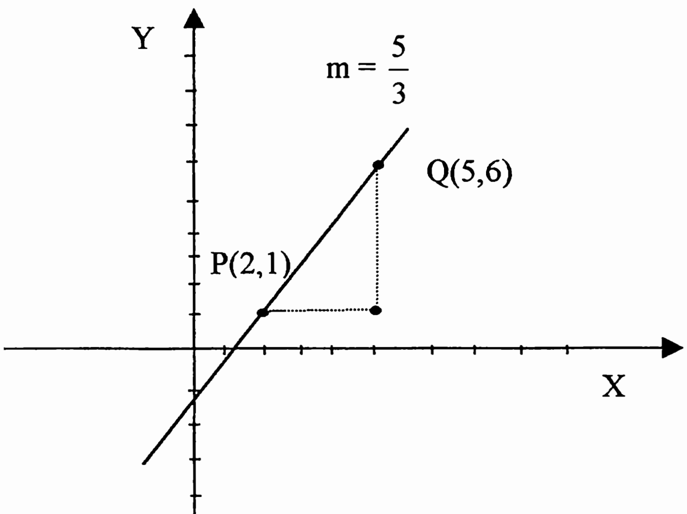
d) La pendiente no esta definida puesto que la recta e vertical.

Esto se advierte también observando que si se utiliza la fórmula de m, el denominador es cero.

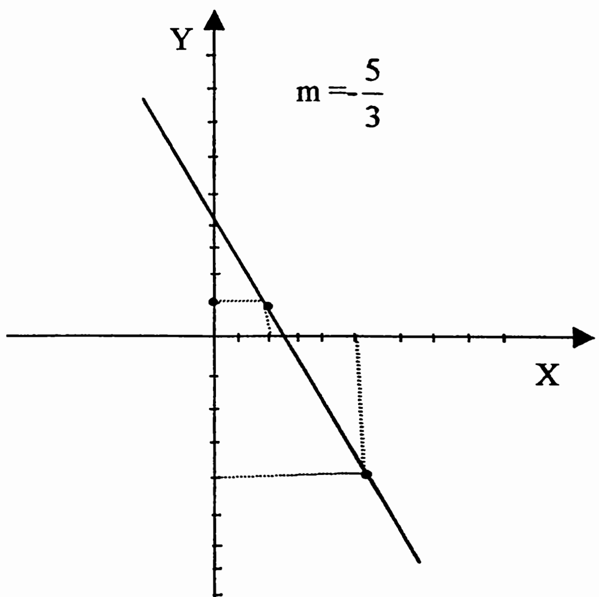
Ejemplo 2.

Trazar la recta que pasa por P(2,1) cuya pendiente es a) $\dfrac{5}{3}$; b) $-\dfrac{5}{3}$

Solución: Si la pendiente de una recta es $\frac{a}{b}$, y b es positiva, entonces para todo cambio de b unidades en dirección horizontal, la recta sube o baja $|a|$ unidades, dependiendo si a es positivo o negativo, respectivamente. Si el punto P(2,1) está sobre la recta y m = $\frac{5}{3}$, podemos obtener otro punto si se recorre 3 unidades a la derecha de P y luego 5 unidades hacia arriba. Con esto obtenemos el punto Q(5,6) y la recta queda determinada. De manera análoga, si m = - $\frac{5}{3}$, nos trasladamos 3 unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo, lo cual da el punto Q(5,-4).



Gráfica 8

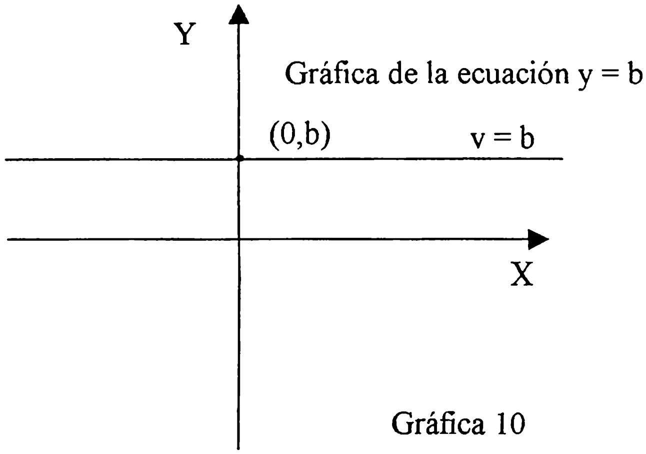


Gráfica 9

Teorema:

i. La gráfica de la ecuación x = a es una recta vertical cuya intercepción x es a.

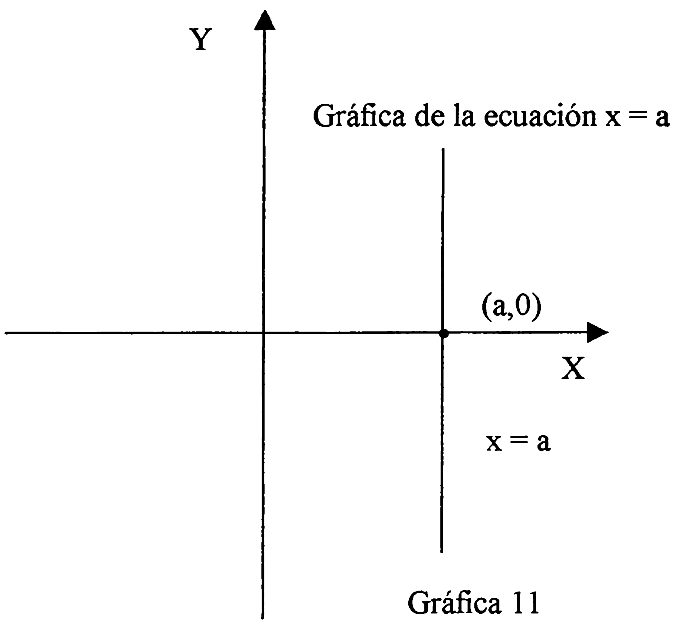
ii. La gráfica de la ecuación y = b es una recta horizontal cuya intercepción y es b.



Gráfica 10

Demostración: Podemos considerar la ecuación x = a, donde a es un número real, como una ecuación en dos variables, x y y, ya que la podemos escribir en la forma x + (0) *y* = a.(a-2) y (a,3) son algunas soluciones de esta ecuación. Evidentemente, todas las soluciones son pares de la forma (a,y), donde *y* toma cualquier valor y *a* es fijo.

De aquí se concluye que x = a es una recta paralela al eje y cuya intersección con el eje x es a, como se ve en la siguiente grafica.



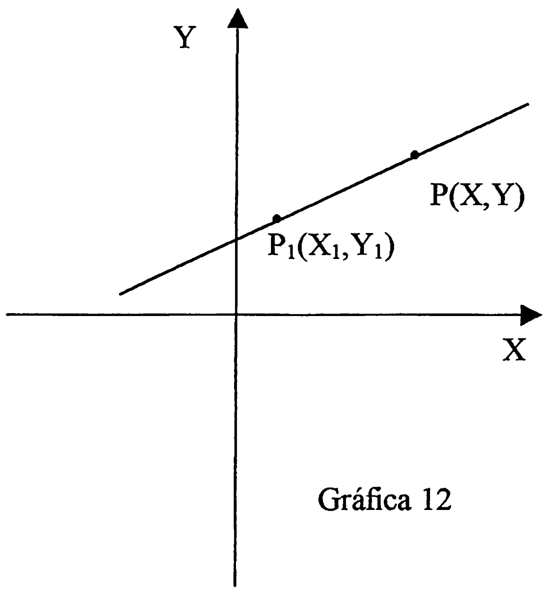
Gráfica 11

Determinamos ahora la ecuación de la recta l con pendiente m que pasa por el punto P_1 (x_1,y_1) (existe una sola recta que verifique estas dos condiciones). Si P(x, y) es cualquier punto con $x \neq x_1$, entonces P esta sobre l si y sólo si m es la pendiente dela recta que pasa por P_1 y P, es decir, si y sólo si.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

Podemos escribir esta ecuación $y - y_1 = m\ (x - x_1)$

Nótese que (x_1,y_1) es también una solución de le ecuación anterior y por lo tanto, los puntos son precisamente aquellos que corresponden a las soluciones. Esta es la ecuación de la recta llamada de **forma de punto y pendiente.**



Gráfica 12

Forma de punto y pendiente de la ecuación de una recta

La ecuación de una recta con pendiente m que pasa por el punto $P(x_1,y_1)$ es:
$y - y_1 = m\ (x - x_1)$.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,7) y B(-3,2)

Solución:

La pendiente m de la recta es

$$m = \frac{7-2}{1-(-3)} = \frac{5}{4}$$

Podemos sustituir las coordenadas del punto A o el B en la ecuación de punto y pendiente utilizando A(1,7).

$$Y - 7 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

Es equivalente a $4y - 28 = 5x - 5$, o bien $5x - 4y + 23 = 0$

La ecuación de la recta $y = mx_1 - mx, + y_1$ que también puede escribirse $y - y_1 = m(x - x_1)$, es de la forma.

$$y = mx + b$$

En donde $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la intercepción y (u ordenada al origen) de la recta, lo cual se puede ver haciendo $x = 0$. La ecuación $y = mx + b$ es la ecuación de la recta l donde se especifica su ordenada al origen y su pendiente. Inversamente, una ecuación de la forma $y = mx + b$, puede escribirse nuevamente como

$$Y - b = m(x - 0)$$

Comparando esta forma de la ecuación de la recta con la forma anterior, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto (0,b). Esto conduce al siguiente resultado.

Forma de Pendiente e Intercepción de la ecuación de una Recta

La gráfica de la ecuación y = mx + b es una recta con pendiente m e intercepción y igual a b.

Hemos visto que toda recta es la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0.$$

En donde a, b, c son números reales, siempre que a y b no sean cero simultáneamente. Una ecuación de esta forma se llama **ecuación lineal** en x y y. Recíprocamente se demostrará que la gráfica de ax + by + c = 0, en donde a y b no son ambos ceros, es siempre una recta. Por una parte, si $b \neq 0$, podemos despejar y para obtener,

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

que es la ecuación de una recta con pendiente $-\frac{a}{b}$ y ordenada al origen $-\frac{c}{b}$.

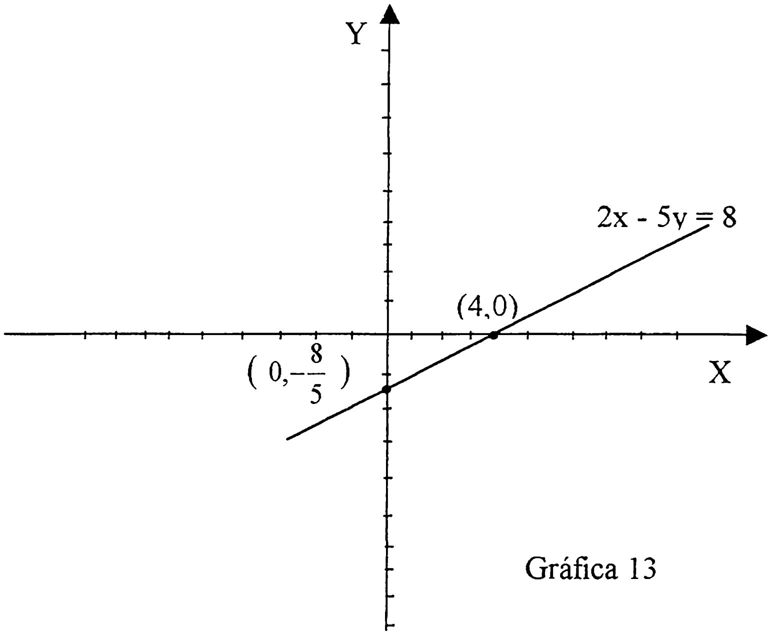
Por otra parte si b = 0 pero $a \neq 0$ obtenemos $x = -\frac{c}{a}$, que es la ecuación de una recta vertical cuya intercepción x es $-\frac{c}{a}$, Esto conduce el siguiente Teorema.

Teorema: La gráfica de la ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es una recta y recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para simplificar, se empleará el término la recta $ax + by + c = 0$ en lugar de la expresión más precisa la recta con ecuación $ax + by + c = 0$.

Ejemplo: Trazar la gráfica de la ecuación 2x - 5y = 8

Solución: De acuerdo al teorema, la gráfica es una recta y por consiguiente, basta determinar dos de sus puntos. Determinaremos las intersecciones con los ejes. Haciendo y = 0 en la ecuación dada, obtenemos que la intercepción x es 4; reemplazamos x por cero obtenemos $y = -\frac{8}{5}$, que es la intercepción y. Esto da la recta de la siguiente gráfica.



Gráfica 13

Otro método para resolver este ejercicio consiste en expresar la ecuación dada en la forma y = mx + b. Para eso despejamos primero el término que contiene a y.

$$5y = 2x - 8$$

Después se dividen ambos lados de esta ecuación entre 5

$$y = \frac{2}{5}x + \left(-\frac{8}{5}\right)$$

que es la forma y = mx + b. Por consiguiente , la pendiente es $m = \frac{2}{5}$ y la ordenada en el origen $b = -\frac{8}{5}$. Ahora es posible trazar la recta que pasa por el punto $(0, -\frac{8}{5})$ y cuya pendiente es $\frac{2}{5}$. Se puede demostrar en el siguiente teorema.

Teorema: Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Esta propiedad se utiliza en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, -7) y es paralela a la recta $6x + 3y - 4 = 0$

Solución: Expresamos la ecuación dada en la forma de pendiente e intercepción.

Escribimos primero $3y = -6x + 4$ y dividimos luego ambos lados entre 3.

$$y = -2x + \frac{4}{3}$$

Esta última ecuación indica que la pendiente es –2. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la línea requerida también tiene pendiente –2. Mediante la forma de punto y pendiente obtenemos:

$$Y + 7 = -2(x - 5)$$

Que es equivalente a $y + 7 = -2x + 10$ o bien $2x + y - 3 = 0$

El teorema siguiente especifica condiciones para rectas perpendiculares entre sí.

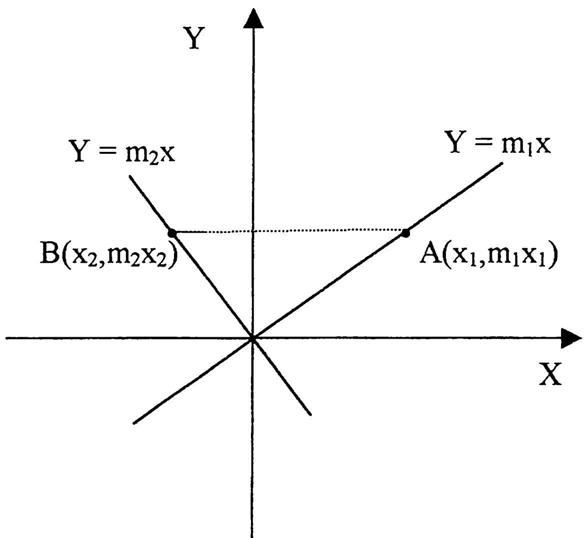
Teorema: Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes $m_1 m_2 = -1$

Para simplificar, consideremos el caso especial donde las rectas se cortan en el origen 0, como se ilustrará en la siguiente gráfica.

Las ecuaciones de las rectas son $y = m_1 x$, $y = m_2 x$. Si elegimos dos puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ diferente de 0.

Como se mostrará, entonces las rectas son perpendiculares, si y solo si el ángulo A o B es recto. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo A o B, se obtiene:

$[d(A,B)]^2 = [d(0,B)]^2 + [d(0,A)]^2$



Gráfica 14

o sea:

$(m_2x_2 - m_1x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (m_2x_2)^2 + x_2^2 + (m_1x_1)^2 + x_1^2$

Haciendo las operaciones indicadas y simplificando se obtiene:

$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$

Dividiendo ambos lados entre $-2x_1x_2$ vemos que las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 + 1 = 0$, o bien $m_1m_2 = -1$.

La demostración es semejante cuando las rectas se cortan en cualquier punto (a,b).

Una forma conveniente para recordar las condiciones de perpendicularidad es notar que m_1 y m_2 deben ser recíprocos negativos uno del otro, es decir:

$m_1 = \frac{-1}{m_2}$ y $m_2 = \frac{-1}{m_1}$.

Ejemplo 6.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,-7) y es perpendicular a la recta $6x + 3y - 4 = 0$

Solución: La pendiente m de la recta es –2 (ver ejemplo 5). Por lo tanto, la pendiente m' de la recta buscada es el recíproco negativo de –2, es decir:

$m' = -[1/(-2)] = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, la ecuación es $y + 7 = \frac{1}{2}(x - 5)$

que equivale a

$$2y + 14 = x - 5, \text{ o bien } x - 2y - 19 = 0$$

Ejemplo 7:

Hallar una ecuación para la perpendicular bisectriz del segmento de recta que va de A(1,7) a B(-3,2)

Solución: Usando la fórmula para el punto medio, el punto medio M del segmento AB es $(-1, \frac{9}{2})$. Puesto que la pendiente de AB es $\frac{5}{4}$ (véase el ejemplo 3), se sigue del teorema anterior que la pendiente de la perpendicular bisectriz es $-\frac{4}{5}$. Aplicando la forma de punto y pendiente

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{4}{5}(x + 1).$$

Multiplicando ambos lados por 10 y simplificando se obtiene $8x + 10y - 37 = 0$

Ejercicios 1.1

Aplicando teoremas, definiciones y fórmulas resuelva los siguiente ejercicios.

Represente los puntos A y B y encuentre la pendiente de la recta que pasa por A y B

1) A(-4, 6), B(-1,18)
2) A(-1, 3) , B(-1, 2)
3) A(-3, 4), B(2, 4)
4) Compruebe que los puntos A(-3,1), B(5,3), C(3,0) y D(-5,-2) son los vértices de un paralelogramo.
5) Pruebe que los puntos A(6,15), B(11, 12), C(-1, -8) y D(-6, -5) son los vértices de un rectángulo.
6) Si los tres vértices consecutivos de un paralelogramo son A(-1, -3), B(4,2), C(-7,5), encuentre el otro vértice.

Obtenga la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas:

1) Pasa por A(2, -6), pendiente $\frac{1}{2}$
2) Pasa por A(-5, -7), B(3, -4)
3) Pasa por A(8, -2), intercepción Y igual a 8
4) Pasa por A(10, -6), paralela:
   a. Al eje Y
   b. Al eje X

5) Dados A(3, -1) y B(-2, 6) encontrar una ecuación para la perpendicular bisectriz del segmento de recta AB.
6) Obtener las ecuaciones de las alturas de un triángulo cuyos vértices son A(-3, 2), B(5, 4), C(3, -8) y encontrar el punto en el que se interceptan las alturas.

7) En cada uno de los ejercicios encuentre la pendiente y la intercepción Y (u ordenada en el origen) de la recta dada y trace su gráfica.

1) $3x - 4y + 8 = 0$
2) $x + 2y = 0$
3) $y = 4$
4) $5x + 4y = 20$
5) $x = 3y + 7$
6) $2y - 5x = 1$
7) $8x = 1 - 4y$
8) $y = 0$

9) Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

2 Funciones Polinomiales

2.1 Funciones Cuadráticas

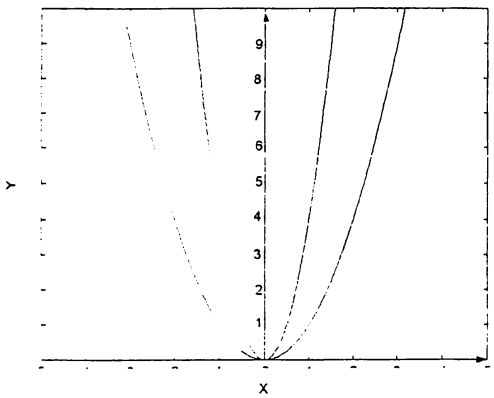
Dentro de las funciones más importantes de las matemáticas se encuentran las funciones polinomiales.

Definición: Una función f se llama función polinomial si $f(x) + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ en donde los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

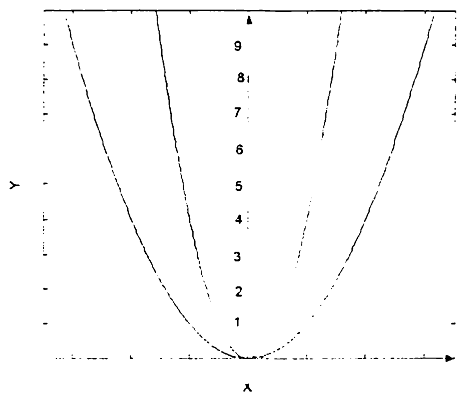
Si en la definición anterior $a_n \neq 0$, se dice que f es de grado n. Nótese que una función polinomial de grado 1 es una función lineal como se ven en la siguiente definición, cuando f es de grado 2 se llama función cuadrática.

Definición: Una función f es una función cuadrática si f (x) = $ax^2 + bx + c$ en donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

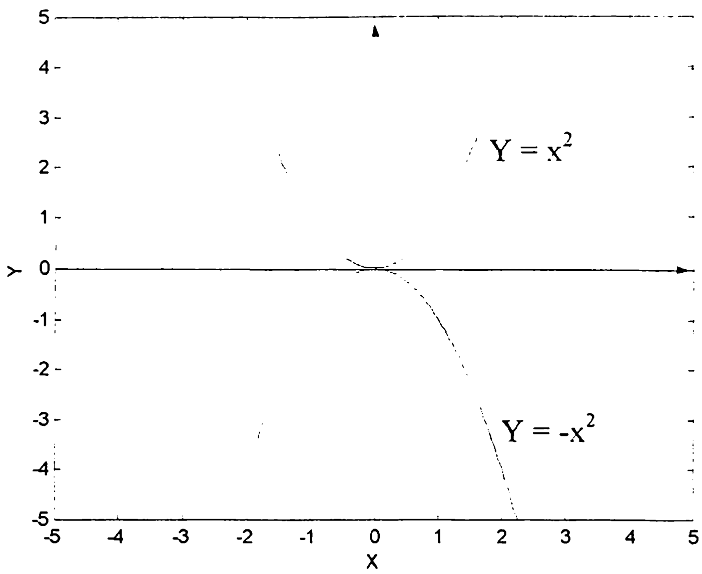
Si b = c = 0 en la definición precedente, entonces $f(x) = ax^2$ y su gráfica es una parábola con vértice en el origen, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



Gráfica 1.



Gráfica 2.



Gráfica 3.

Si b = 0 y c$\neq$ 0, entonces

$f(x) = a^2 + c$

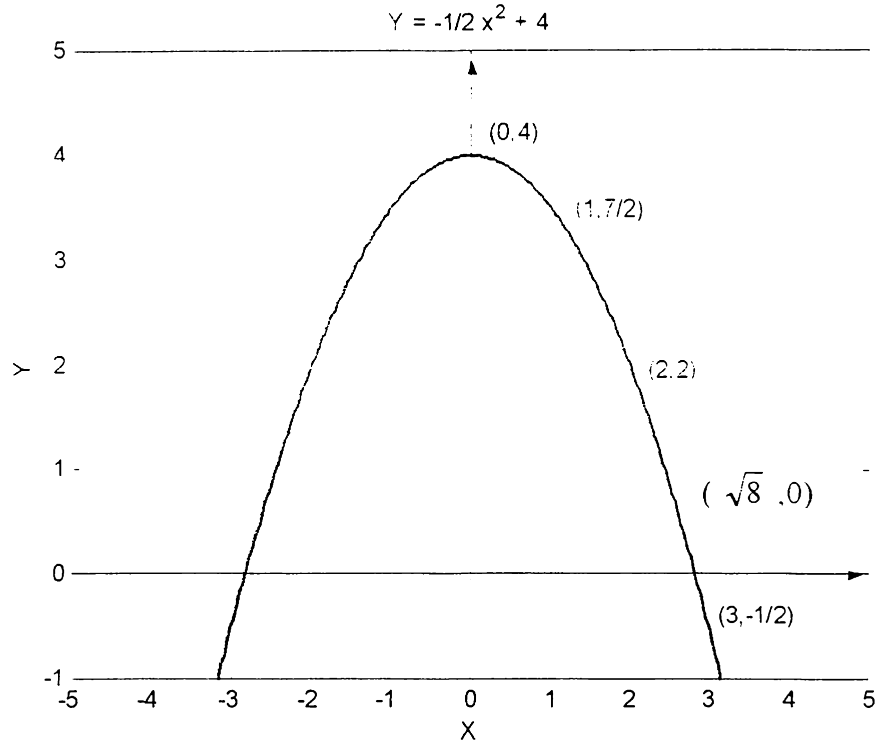
Ejemplo 1: Trazar la gráfica de f si $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.

La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ se puede encontrar trasladando la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ cuatro unidades hacia arriba.

En la siguiente tabla, se dan las coordenadas de algunos de los puntos de la gráfica.

X	0	1	2	$\sqrt{8}$	3
Y	4	$\frac{7}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$

Si representamos estos puntos y consideramos la simetría respecto al eje "y" obtenemos.



Gráfica 4.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces podemos emplear la técnica de completar el cuadrado para cambiar la forma de $f(x)$ a $f(x) = a(x-h)^2 + k$ en donde h y k son número reales. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo. Como se verá la gráfica de f puede obtenerse fácilmente de este nuevo método.

Ejemplo 2: Expresar $f(x)$ en la forma $a(x-h)^2 + k$ si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$

Solución: Antes de completar el cuadrado es de suma importancia factorizar el coeficiente de x^2 de los primeros 2 términos de $f(x)$ de la siguiente manera.

$$f(x) = 3x^2 + 24x + 50$$
$$= 3(x^2 + 8x) + 50$$

Para completar el cuadrado de la expresión dentro del paréntesis, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, esto es $\left(\frac{8}{2}\right)^2$, o sea 16; sin embargo, si sumamos 16 a la expresión entre paréntesis, entonces, debido al factor 3, en realidad estamos sumando 48 a $f(x)$. Por esto, debemos compensar restando 48; entonces así:

$$f(x) = 3(x^2 + 8x \qquad) + 50$$

$$f(x) = 3(x^2 + 8x + 16) + 50 - 48$$

$$f(x) = 3(x+4)^2 + 2$$

que tiene la forma deseada con $a = 3$ $\quad h = -4$ y k = 2.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, completando el cuadrado como se hizo en el ejemplo anterior, vemos que la gráfica de f, es la misma que la gráfica de una ecuación de la forma $y = a(x-h)^2 + k$.

Sabemos que la gráfica de $y = a(x-h)^2$ se puede obtener mediante la traslación de la gráfica $y = ax^2$ hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de que h sea positiva o negativa, respectivamente por consiguiente, la gráfica de $y = a(x-h)^2$ es una parábola con vértice en (h,0) y eje paralelo al eje y.

Como la gráfica de $y = a(x-h)^2 + k$ se puede obtener por una traslación vertical de la gráfica de $y = a(x-h)^2$ de k unidades, se dice que la gráfica de una función cuadrática f es una parábola con vértice (h,k) y eje vertical. Obsérvese que puesto que (h,k) es el punto más bajo a el más alto de la parábola, $f(x)$ tiene su mínimo valor en x = h este valor es $f(h) = k$.

Se ha obtenido la siguiente ecuación de la parábola con vértice en (h,k) y eje vertical.

Ecuación Estándar de la parábola (eje vertical)

$$y - k = a(x - h)^2$$

Esta parábola se abre hacia arriba si $a > 0$. o hacia abajo si $a < 0$

Ejemplo 3: Trazar la gráfica de f si $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ y hallar el valor mínimo de $f(x)$.

Solución: La gráfica de f es una parábola igual a la de la ecuación $y = 2x^2 - 6x + 4$. Procedemos a completar el cuadrado, esto es:

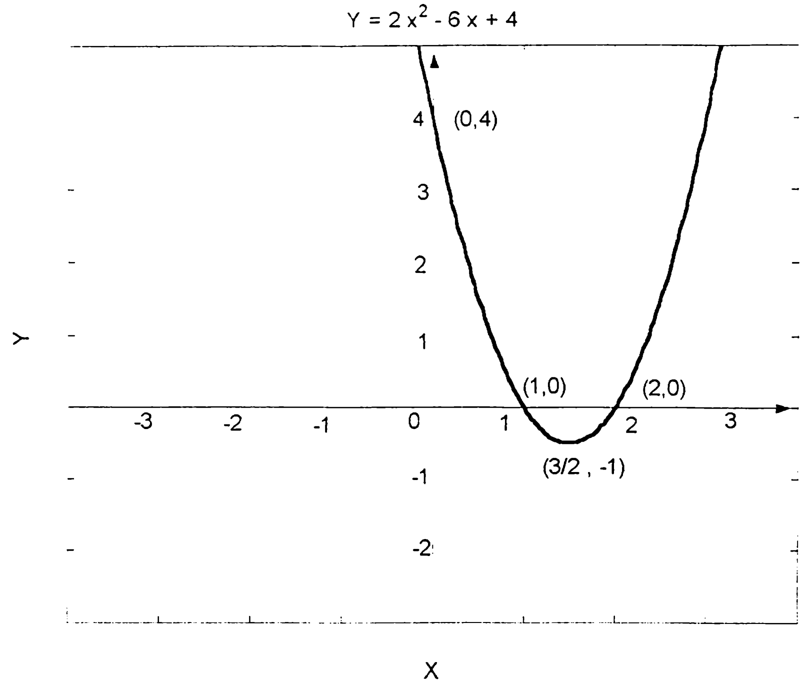
$$y = 2x^2 - 6x + 4$$
$$= 2(x^2 - 3x \quad) + 4$$
$$= 2(x^2 - 3x \quad + \frac{9}{4}) + (4 - \frac{9}{4})$$
$$= 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}$$

Si escribimos la última ecuación en la forma:

$$y + \frac{1}{2} = 2(x - \frac{3}{2})^2$$

y la comparamos con la ecuación estándar de la parábola, tenemos que h = $\frac{3}{2}$ y $k = -\frac{1}{2}$ por lo tanto, el vértice (h,k) de la parábola es $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Como $a = 2 > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba. La intercepción Y es $f(0) = 4$.

Para obtener las intercepciones con el eje x, resolvemos $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o la ecuación equivalente (2x-2)(x-2) = 0, obteniendo x = 1 y x = 2. El vértice junto con las intercepciones con los ejes X y Y son suficiente para obtener una gráfica razonablemente precisa. El mínimo valor de f, el cual ocurre en el vértice, es $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.



Gráfica 5.

Ejemplo 4:

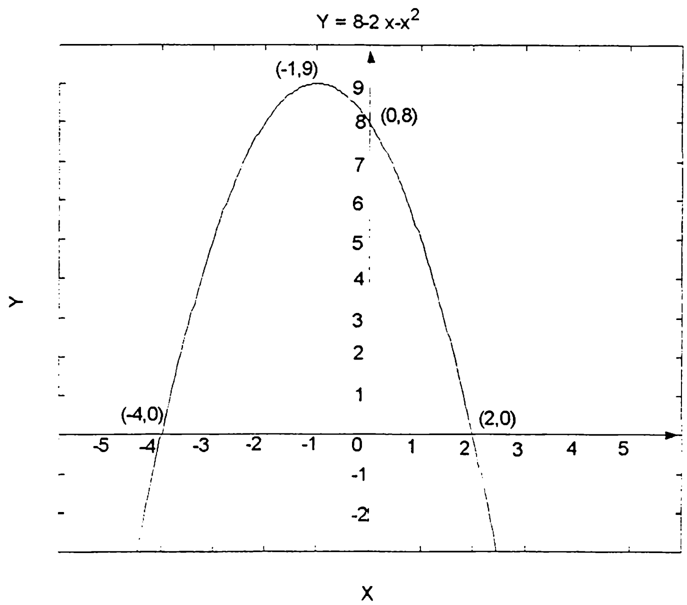
Trazar la gráfica de f si $f(x) = 8 - 2x - x^2$ y hallar el máximo valor de f(x).

$y = -x^2 - 2x + 8$

$= -(x^2 + 2x) + 8$

$= -(x^2 + 2x + 1) + 8 + 1$

$= -(x + 1)^2 + 9$



Gráfica 6.

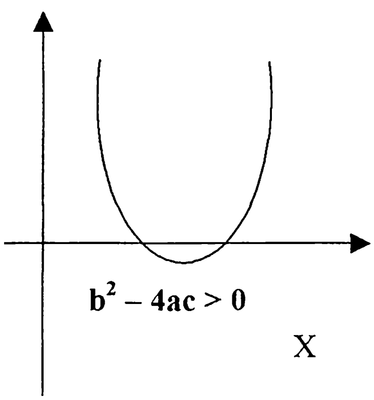
Si ahora escribimos $y - 9 = -(x + 1)^2$ y comparamos con la ecuación estándar, tenemos que h =-1, k=9, y por lo tanto, el vértice es (-1,9). Como a =-1<0, la parábola abre hacia abajo.

Para obtener las intersecciones con el eje x, resolvemos la ecuación $8 - 2x - x^2 = 0$.

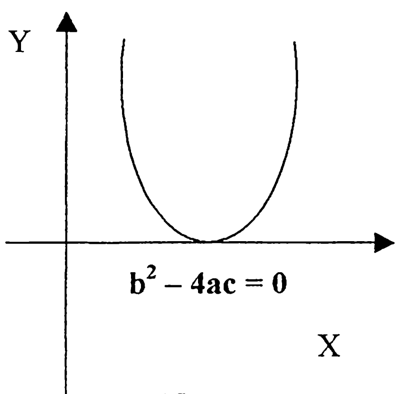
Ya sea por factorización o usando la fórmula cuadrática, obtenemos: $x = -4$ y $x = 2$. La intercepción con el eje Y es 8. Esta información da la gráfica seis f alcanza su máximo valor en el vértice y éste es, $f(-1) = 9$. Las intersecciones en x de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ son las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$ y por lo tanto son $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y no iguales, y la gráfica, dos intercepciones x. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución (doble) y la gráfica es tangente al eje x. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y la gráfica carece de intersecciones x. A continuación se ilustran los tres casos para $a>0$. Una situación similar se presenta si $a< 0$ pero en este caso las parábolas se abren hacia abajo.

Algunos problemas pueden resolverse encontrando valores máximos o mínimos de funciones cuadráticas.

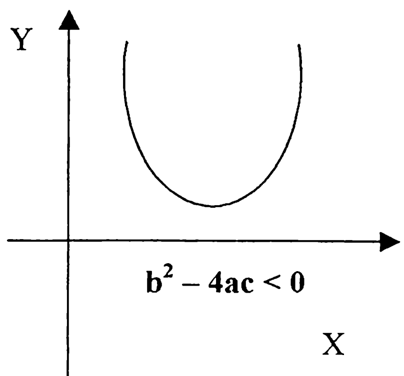
$$y = ax^2 + bx + c$$



Gráfica 7.



Gráfica 8.



Gráfica 9.

Las parábolas tienen muchas aplicaciones en el mundo físico. Se puede mostrar que si se lanza un proyectil y sobre éste únicamente actúa la fuerza de gravedad esto es, si no hay resistencia del aire ni otros factores externos entonces la trayectoria del proyectil será una parábola.

Las propiedades de las parábolas se utilizan en el diseño de espejos para telescopios y reflectores. También se utilizan en la construcción de antenas.

Ejercicios 2.1

Aplicando las definiciones y conocimientos adquiridos, realice los ejercicios siguientes.

1) Si $f(x) = ax^2 + 2$, trazar la gráfica de f para:
   a. a =2
   b. a =5
   c. $a = \frac{1}{2}$
   d. a =-3

2) Si $f(x) = 4x^2 + c$, trace la gráfica de f para:
   a. c =2
   b. c =5
   c. c = $\frac{1}{2}$
   d. c =-3

3) Trace la gráfica de f y encuentre el vértice.
   a. $f(x) = 4x^2 - 9$
   b. $f(x) = 2x^2 + 3$
   c. $f(x) = 9 - 4x^2$
   d. $f(x) = 16 - 9x^2$

4) Utilice la fórmula de la cuadrática para encontrar los ceros de f.
   a. $f(x) = 4x^2 - 11x - 3$
   b. $f(x) = 25x^2 + 10x + 1$

c. $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

d. $f(x) = 10x^2 + x - 21$

5) Utilizando la técnica de completar cuadrados, para expresar la función $f(x)$ en la forma $a(x-h)^2 + k$, y encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

a. $f(x) = 2x^2 - 16x + 23$

b. $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

c. $f(x) = -5x^2 - 10x + 3$

d. $f(x) = -2x^2 - 12x - 12$

6) Trace la gráfica de f y encuentre el valor máximo o mínimo.

a. $f(x) = x^2 + 5x + 4$

b. $f(x) = x^2 - 6x$

c. $f(x) = 8x - 12 - x^2$

d. $f(x) = 10 + 3x - x^2$

e. $f(x) = x^2 + x + 3$

f. $f(x) = x^2 + 2x + 5$

2.2 Gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2.

Supongamos que f sea una función polinomial de grado n; esto es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Para $a_n \neq 0$. El dominio de f es R. Si el grado es impar entonces el contradominio de f también es R, sin embargo, si el grado es par, entonces el contradominio es un intervalo infinito de la forma $(-\infty, a\,]$ o bien $[a, \infty)$.

Recuerde que si $f(c) = 0$, entonces c es un cero de f o bien de $f(x)$. También se conoce a c como solución o raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Los cero de f son las intersecciones x de la gráfica f.

Si una función polinomial es de grado cero (0), entonces $f(x) = a$ para algún número real a, diferente de cero, y la gráfica es una recta horizontal. Las gráficas de las funciones polinomiales de grado 1 (funciones lineales) son rectas. Las gráficas de las funciones polinomiales de grado 2 (funciones cuadráticas) son parábolas. En esta sección estudiaremos las gráficas de las funciones polinomiales de grado mayor que 2. Si f es de grado n y todos los coeficientes excepto a_n son cero entonces:

$$f(x) = ax^n \text{ en donde } a = a_n \neq 0$$

En este caso, si n = 1, la gráfica de f es una recta que pasa por el origen, mientras que si n = 2, la gráfica es una parábola vertical con vértice en el origen. El siguiente ejemplo ilustra otros casos con n = 3.

Ejemplo 1.

Trazar la gráfica de f si:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

(b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

Solución:

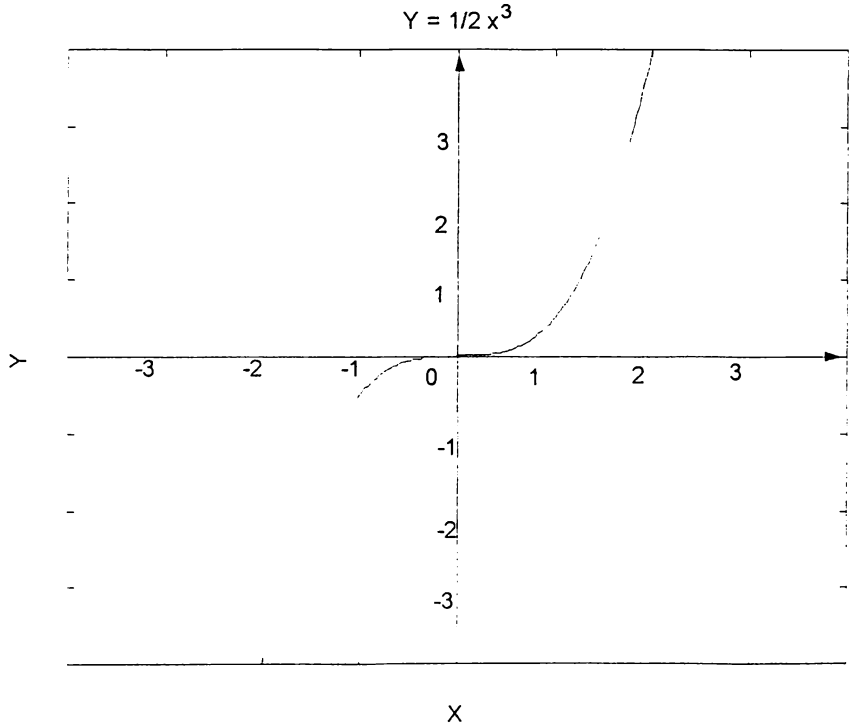
(a) La siguiente Tabla muestra varios puntos de la gráfica $y = \frac{1}{2}x^3$

X	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

Como f es una función impar, la gráfica de f es simétrica respecto al origen y por lo tanto, los puntos $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{16}\right),\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, etc.

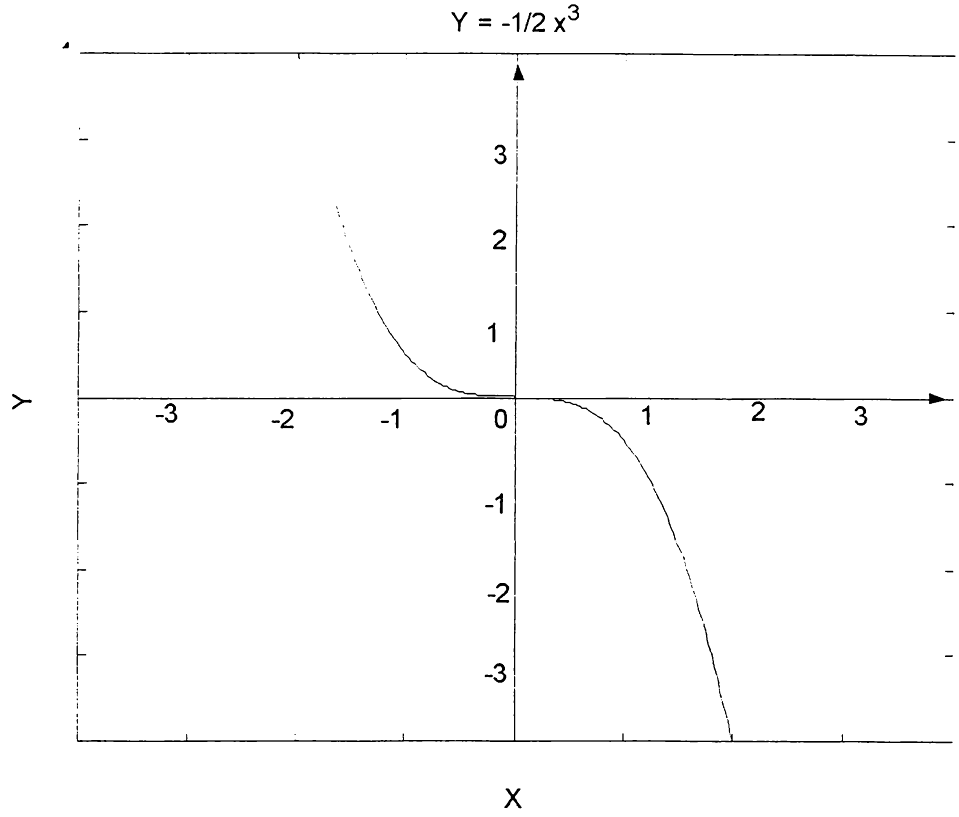
Son también puntos de la gráfica.

La gráfica aparece en (i)



Gráfica 1.

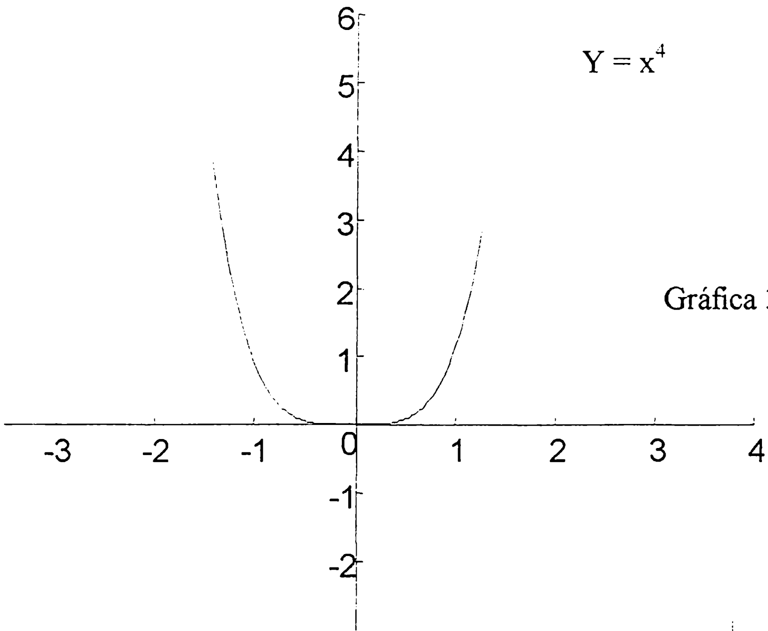
(b) Si $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica se puede obtener a partir de el inicio (a) multiplicando las ordenadas por –1. Esto equivale, como se muestra en la siguiente gráfica.



Gráfica 2.

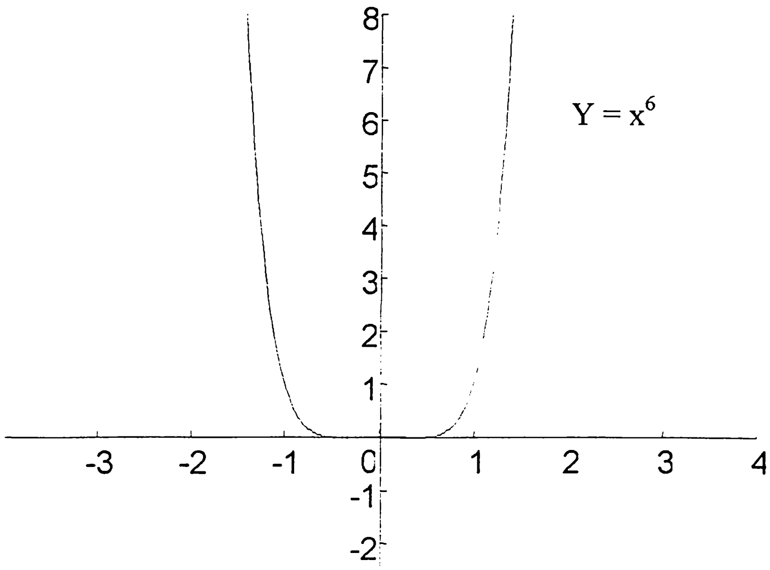
En general si $f(x) = ax^3$, entonces en el valor numérico del coeficiente a tendrá como consecuencia que la gráfica crezca o decrezca más tajantemente, por ejemplo, si $f(x) = 10x^3$, tenemos f (1) = 10, f(2) = 80 y $f(-2) = -80$, el efecto que causará un exponente mayor, manteniendo constante el valor de a, será también que la gráfica crezca o decrezca más rápidamente; por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x^5$.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero par, entonces la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. Para el caso $|a| = 1$. Nótese que al aumentar el valor del exponente, la gráfica se aplana más en el origen. También crece (o decrece) más rápidamente a medida que $|x|$ crece a través de valores mayores que 1.



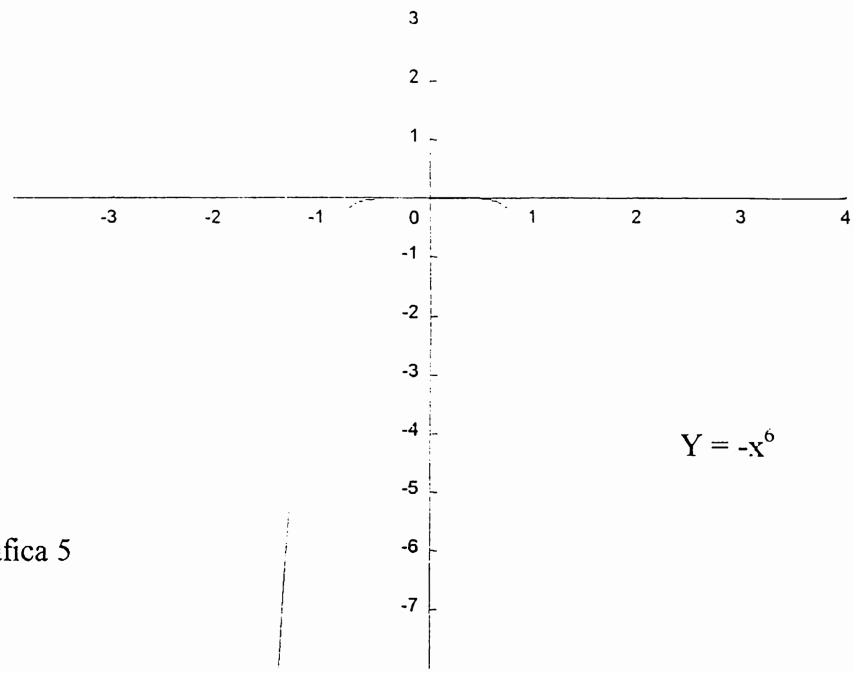
$Y = x^4$

Gráfica 3



$Y = x^6$

Gráfica 4



Gráfica 5

Ejercicio 2.2

Resuelva los ejercicios siguientes.

1. Sea $f(x) = ax^3 + 2$, trazar la gráfica de f para:

   a) $a = 2$
   b) $a = 4$
   c) $a = 1$
   d) $a = -2$

2. Sea $f(x) = 2x^3 + c$, Trazar la gráfica de f para:

   a) c = 2
   b) c = 4
   c) c = 1
   d) c = -2

3. Determine todos los valores de x tales que $f(x)>0$, y todos los x, tales que $f(x)<0$, trazar la gráfica de f.

1. $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4$
2. $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-16$
3. $f(x)=\frac{1}{8}x^4+2$
4. $f(x)=1-x^5$
5. $f(x)=x^3-9x$
6. $f(x)=16x-x^3$
7. $f(x)=-x^3-x^2+2x$
8. $f(x)=x^3+x^2-12x$
9. $f(x)=(x+4)(x-1)(x-5)$
10. $f(x)=(x+2)(x-3)(x-4)$
11. $f(x)=x^4-16$
12. $f(x)=16-x^4$
13. $f(x)=-x^4-3x^2+4$

4. Si $f(x)$ es una función polinomial y si los coeficientes de todas las potencias impares de x son 0, demuestre que f es una función par.

5. Si $f(x)$ es una función polinomial y si los coeficientes de todas las potencias pares de x son 0, demuestre que f es una función impar.

3 Funciones Racionales.

Una función f es racional si, para toda x su dominio, $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

En donde g(x) y h(x) son polinomios. Las raíces del numerador y del denominador son de mucha importancia. En esta sección se supondrá que g(x) y h(x) no tienen factores comunes, y por lo tanto, no tienen raíces comunes. Si g(c) = 0 entonces f(c) = 0. Sin embargo, si h(c) = 0, entonces f(c) no esta definida. El comportamiento de f(x) requiere de especial atención cuando x esta cerca de una raíz del denominador h(x).

Ejemplo 1. trazar la grafica de f si:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Solución

f(x) no tiene raíces porque su numerador 1 nunca es igual a cero. Por consiguiente, la grafica no corta al eje x.

Como el denominador X–2 es cero en X=2, y si X>2, entonces f(x) es muy grande por ejemplo.

$$f(2.1) = \frac{1}{2.1-2} = \frac{1}{0.1} = 10$$

$$f(2.01) = \frac{1}{2.01-2} = \frac{1}{0.01} = 100$$

$$f(2.001) = \frac{1}{2.001-2} = \frac{1}{0.001} = 1000$$

Si X esta cerca de 2 y X<2, entonces f(x) es numéricamente grande, pero negativo, esto es:

$$f(1.9)=\frac{1}{1.9-2}=\frac{1}{-0.1}=-10$$

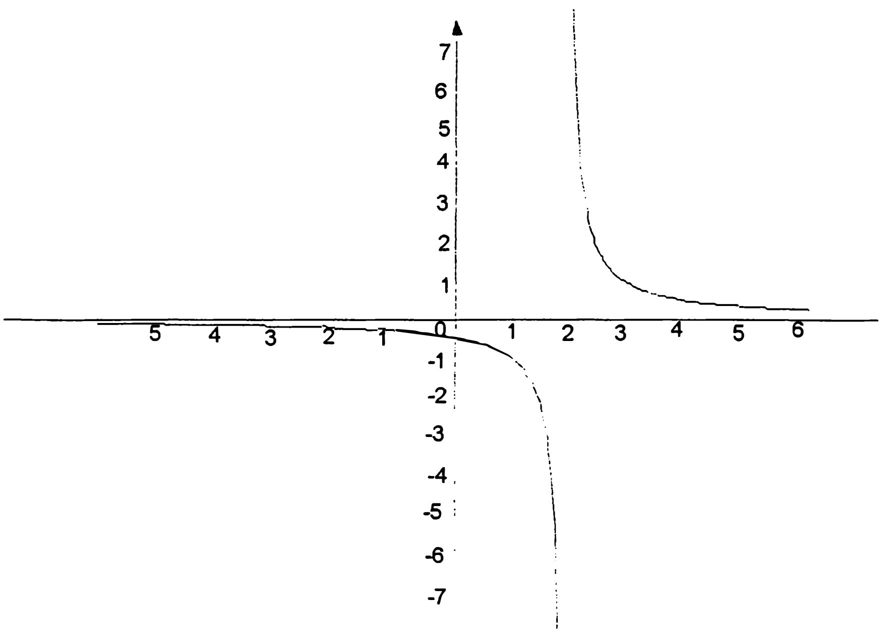
$$f(1.99)=\frac{1}{1.99-2}=\frac{1}{-0.01}=-100$$

$$f(1.999)=\frac{1}{1.999-2}=\frac{1}{-0.001}=-1000$$

La siguiente tabla muestra otros valores de f(x)

X	-8	-1	0	1	3	4	12
F(x)	-1/10	-1/3	-1/2	-1	1	1/2	1/10

Obsérvese que a medida que | x | crece, f(x) se aproxima a cero. Marcando algunos puntos y considerando lo que ocurre cerca de X=2 se obtiene la siguiente gráfica.



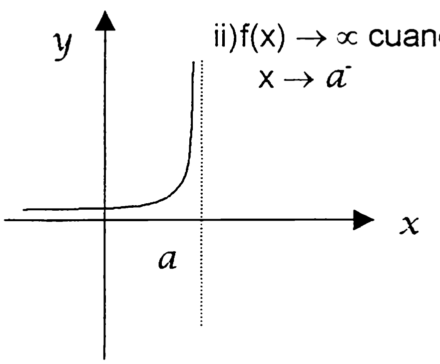
Gráfica 1

En el ejemplo anterior, f(x) se puede hacer tan grande como se desee si escogemos X suficientemente cercana a 2 (con X>2). Esto lo demostraremos simbólicamente por $f(x)\rightarrow\alpha$ cuando $X\rightarrow 2^{+}$ lo cual se puede leer f(x) crece ilimitadamente a medida que X se acerca a 2 por la derecha (es decir, f(x) tiende a infinito cuando X tiende a 2 por la derecha). Es importante recordar que el símbolo α (que se lee infinito) no representa ningún numero real sino que únicamente se usa como símbolo del comportamiento de cierto tipo de funciones para el caso X<2 escribiremos

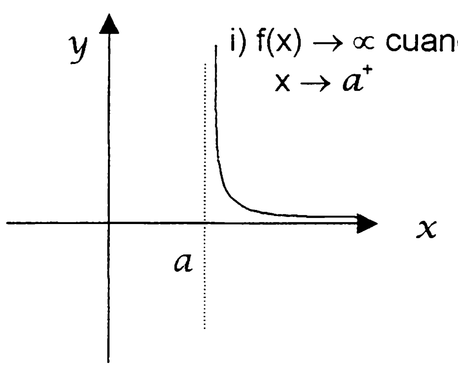
$$f(x)\rightarrow -\alpha \text{ cuando } X\rightarrow 2^{-}.$$

Lo cual se lee f(x) decrece ilimitadamente a medida que X se aproxima a 2 por la izquierda (es decir, f(x) tiende a menos infinito cuando X tiende a 2 por la izquierda).

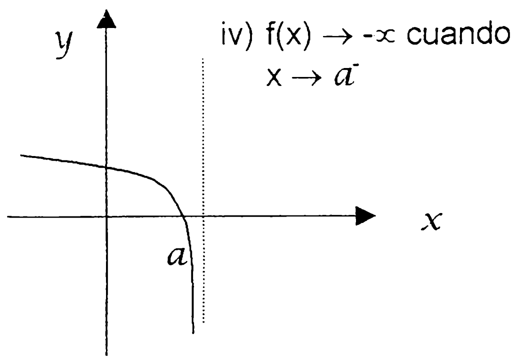
Extenderemos estas ideas a funciones arbitrarias y al caso en que X se aproxima a cualquier numero real a . En general el símbolo $X\rightarrow a^{+}$ denotara que X se aproxima a a por la derecha, esto es, por valores mayores que a . El símbolo $X\rightarrow a^{-}$ significara que X se aproxima a a por la izquierda, esto es, por valores menores que a . En las siguientes gráficas se muestran algunos ejemplos de la forma en que una función f crece o decrece ilimitadamente, así como la notación que se emplea en la figura se ha representado a positivo; es claro que también puede ser a <0.



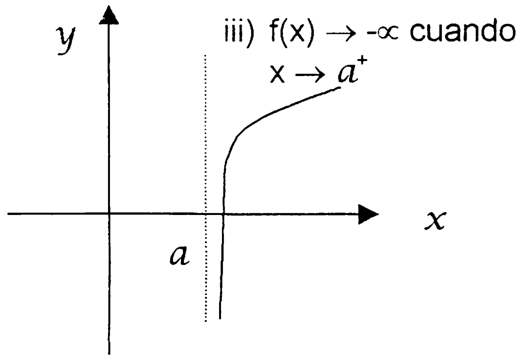
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



Gráfica 5

3.1 Asíntota Vertical.

Definición: La recta X= a es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si F(x)→ α o bien f(x)→ -α cuando X tiende a a, por la derecha o por la izquierda.

En las gráficas anteriores se representan las asíntotas verticales mediante líneas punteadas.

Las asíntotas verticales son características comunes de las gráficas de funciones racionales. De hecho si a es una raíz del denominador h(x) entonces la gráfica de $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ tiene la asíntota vertical X= a.

También nos interesaran los valores de f(x) cuando X es grande. Como ilustración si en el ejemplo 1 asignamos valores muy grandes a X, entonces f(x) esta cerca de 0. Esto es

$$f(1002)=\frac{1}{1000}=0.001 \qquad \text{y} \qquad f(1{,}000{,}002)=\frac{1}{1{,}000{,}000}=0.000001$$

Mas aún, podemos hacer que f(x) se acerque a 0 tanto como queramos si escogemos X suficientemente grande. Esto se expresa simbólicamente por f(x)→0 cuando X→ α, lo cual se lee: f(x) se aproxima a o (o sea f(x) tiende a 0) cuando X crece ilimitadamente (o bien cuando X tiende a infinito).

En forma similar, en el ejemplo 1, escribimos.

f(x)$\rightarrow$0 cuando X$\rightarrow -\alpha$, lo cual se lee: f(x) se aproxima a o (o sea f(x) tiende a 0) cuando X decrece ilimitadamente (o bien cuando X tiende a menos infinito).

3.2 Asintota Horizontal

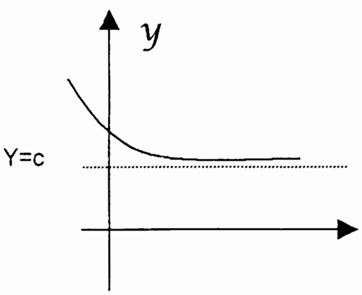
En el ejemplo 1, la recta Y=0, esto es, el eje X, es la asíntota horizontal de la gráfica. En general, se tiene la siguiente definición, donde la notación es suficientemente clara.

Definición: La recta Y=b es una asíntota horizontal, de la gráfica de la función f si

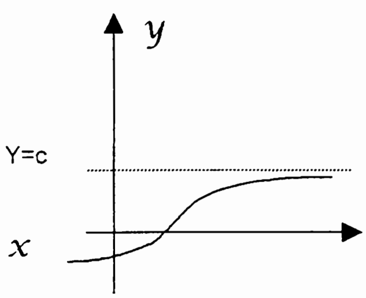
$$f(x) \rightarrow b \text{ cuando } X \rightarrow \alpha \quad \text{o cuando} \quad X \rightarrow -\alpha$$

Las gráficas de las funciones racionales tienen frecuentemente asíntotas horizontales, en las siguientes gráficas se ilustran algunos casos típicos (para x$\rightarrow \propto$). La forma en que la gráfica se aproxima a la recta Y =0 varia, dependiendo de la naturaleza de la función. Se pueden hacer gráficas similares para el caso x$\rightarrow -\propto$. Nótese que, como se ve en el tercer esquema, la gráfica de f puede cruzar la asíntota horizontal.

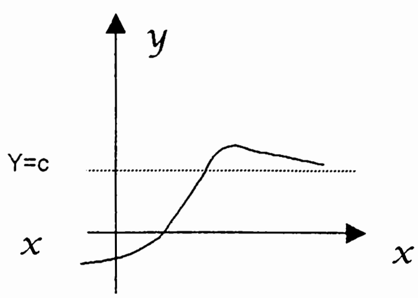
$$f(x) \rightarrow c \text{ cuando } X \rightarrow \alpha$$



Gráfica 7



Gráfica 8



Gráfica 9

El siguiente teorema es útil para localizar las asíntotas horizontales de la gráfica de una función racional.

Teorema de las asíntotas Horizontales.
Sea $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$
i) Si n<k, entonces el eje x es una asintota horizontal de la gráfica de f.
ii) Si n=k, entonces la recta $y = \dfrac{a_n}{b_k}$ es una asíntota horizontal.
iii) Si n<k, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

Las demostraciones de i) y ii) de este teorema se pueden elaborar tomando como pauta la solución del siguiente ejemplo. Para el caso iii) se puede dar un argumento similar.

Ejemplo 2. Determinar las asíntotas horizontales de la gráfica de f si.

a) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-x-6}$ b) $y = \dfrac{5x^2+1}{3x^2-4}$

Solución.

a) El grado del numeral 3x-1 es menor que el grado del denominador x^2-x-6, por lo tanto, por la parte i) del teorema, el eje x es una asíntota obteniendo. Para verificar esto directamente, se divide en el numerador y el denominador del cociente entre x^2, obteniendo.

$$f(x)=\frac{\left(\frac{3x-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{x^2-x-6}{x^2}\right)}=\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}},x\neq 0$$

Si es x muy grande, entonces tanto $1/x^2$ están cerca de cero y por lo tanto,

$$f(x)\approx\frac{0-0}{1-0-0}=\frac{0}{1}=0$$

Entonces $f(x)\to 0$ cuando $x\to\propto$.

Puesto que f(x) es la coordenada y de un punto en la gráfica, esto significa que el eje es una asíntota horizontal.

b) Si $f(x)=\frac{5x^2+1}{3x^2-4}$, el numerador y el denominador son del mismo grado y, por lo tanto, por la parte ii) del teorema, la recta y = 5/3 es una asíntota horizontal. Esto se puede comprobar directamente dividiendo el denominador y numerador de f(x) entre x^2, obteniendo.

$$f(x)=\frac{5+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x^2}}$$

Puesto que $1/x^2\to 0$ cuando $x\to\propto$, se tiene que

$$f(x)=\frac{5+0}{3-0}=\frac{5}{3}\text{ asíntota } x\to 0$$

A continuación se darán algunas pautas para trazar la gráfica de una función racional estas mismas se aplican para los ejercicios 3, 4 y 5.

Guía

Para trazar la gráfica de $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ en donde g(x) y h(x) son polinomios que no tienen factor común.

Pasos:

1) Determinar las raíces reales del numerador g(x), y usarlas para fijar los puntos correspondientes a las intersecciones con el eje x.
2) Hallar las raíces reales del denominador h(x). Para cada raíz a , la recta x = a es una asíntota vertical. Represente x= a con una línea punteada.
3) Obtener el signo de f(x) en cada uno de los intervalos que determinan las raíces de g(x) y h(x). Usar estos signos para determinar si la gráfica esta arriba o abajo del eje X en cada intervalo.
4) Si x=a es una asíntota vertical, usar la información del paso 3 para determinar si f(x)$\to\infty$ o si f(x)$\to -\infty$ cuando:

   (i) x$\to a^-$; (ii) x$\to a^+$.

   Indicar este resultado trazando una porción de la gráfica a cada lado de x=a.
5) Emplear la información del paso 3 para determinar la forma en que la gráfica corte al eje X.
6) Aplicar el teorema de las asíntotas horizontales. Si existe una asíntota horizontal, represéntela con línea punteada.
7) Trazar la gráfica usando la información encontrada en los pasos anteriores y situando los puntos siempre que sea necesario.

Ejemplo 3. Trazar la gráfica de f si.

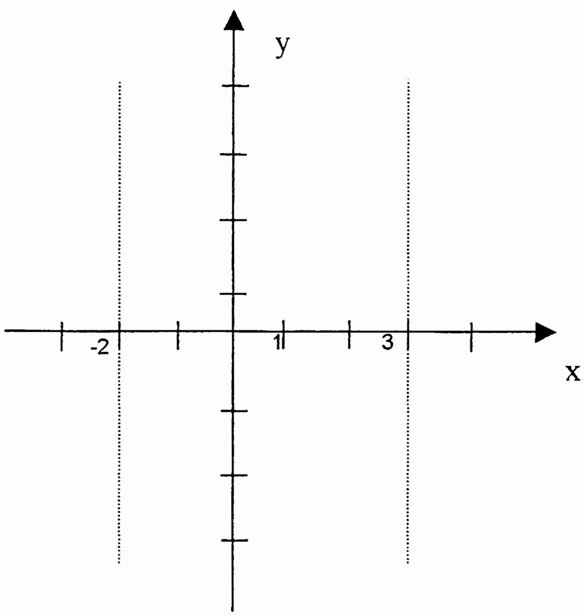
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

Solución Es conveniente factorizar el denominador como se indica a continuación:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

Obtendremos la gráfica siguiendo los pasos indicados.

Paso 1. El numerador X -1 tiene raíz 1, por consiguiente, se sitúa el punto (1, 0) en la gráfica, como se muestra en la gráfica.



Gráfica 10

Paso 2. El denominador tiene raíces –2 y 3. entonces las rectas x=-2 y x=3 son asíntotas verticales que se representan con línea punteada como se ve la gráfica.

Paso 3. Las raíces -2, 1 y 3 del numerador y del denominador de f(x) determinan los siguientes intervalos; (-∝, -2), (-2, -1), (1, 3) y (3, ∝).

Como f(x) es el cociente de dos polinomios, se deduce, que f(x) es siempre positiva o siempre negativa en cada uno de tales intervalos. En la siguiente tabla se presentan las pruebas de signo usadas para determinar el signo de f(x).

Intervalo	*(-∝, -2)*	*(-2, 1)*	*(1, 3)*	*(3, ∝)*
Prueba de signo	f(-3)= -2/3	f(0)= 1/6	f(2)= -1/4	F(4)= ¼
Signo de f(x)	-	+	-	+
Posición de la gráfica	Por debajo del eje X	Por encima del eje X	Por debajo del eje X	Por encima del eje X

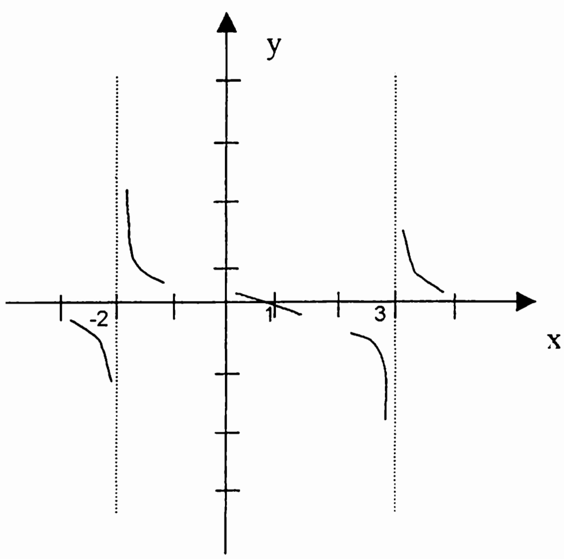
Paso 4. Se utiliza la cuarta columna de la tabla del paso 3 para investigar el comportamiento de f(x) cerca de cada asíntota vertical.

a) Considérese la asíntota vertical x= -2. Como la gráfica se encuentre por debajo del eje X en el intervalo (-∝, -2), entonces $f(x) \to -\propto$ cuando $x \to -2$.

Como la gráfica se encuentra por encima del eje X en el intervalo (-2, 1), entonces

$$f(x) \to \propto \text{ cuando } x \to -2^+$$

Si señalamos estos hechos en la siguiente figura con trazos de porciones de la gráfica a cada lado de la recta X= -2



Gráfica 11

b) Considérese la asíntota vertical X= 3. La gráfica se encuentra por debajo del eje X en el intervalo (1, 3) por consiguiente.

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 3^-$$

La gráfica esta por encima del eje X en (3, ∞) y así;

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to 3^+$$

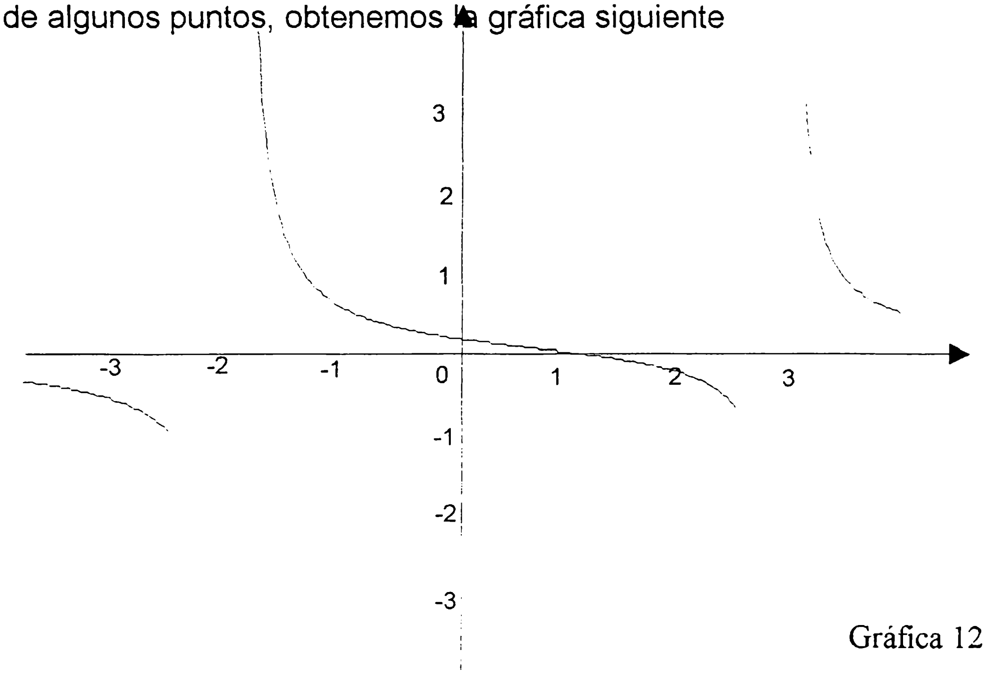
La gráfica esta por encima del eje X en (3, ∞) y así $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 3^+$

Se indica esto en la gráfica siguiente, con trazos de porciones de la gráfica a cada lado de X= 3

Paso 5. La cuarta columna del paso 3, indica que la gráfica cruza el eje X en (1, 0) en la forma que se ilustra en la gráfica del paso 4.

Paso 6. El grado del numerador X-1 es menor que el denominador X^2-X-6. Por consiguiente, por la parte i) del teorema de las asíntotas horizontales (si n<k, entonces el eje X es una asíntota horizontal de la gráfica de f).

Paso 7. Utilizando la información de los pasos 4, 5 y 6, así como la ubicación de algunos puntos, obtenemos la gráfica siguiente



$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6}$$

Gráfica 12

Ejemplo 4. Trazar la gráfica de f si.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

Solución : Factorizamos el denominador

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$$

Seguimos nuevamente los pasos del ejemplo anterior

Paso 1. El numerador X^2 tiene raíz 0(cero) y por lo tanto, la gráfica corta al eje X en (0, 0), como se va a mostrar en la siguiente gráfica.

Paso 2. Como el denominador tiene raíces –1 y 2, las rectas X= -1 y X= 2, son asíntotas verticales que se representan con línea punteada en la gráfica

Paso 3. Los intervalos que determinan las raíces –1 y 2, son (-∝, -1), (-1, 0), (0, 2) y (2, ∝).

Seguimos el procedimiento usado en el paso 3 del ejemplo 2 para obtener la siguiente tabla.

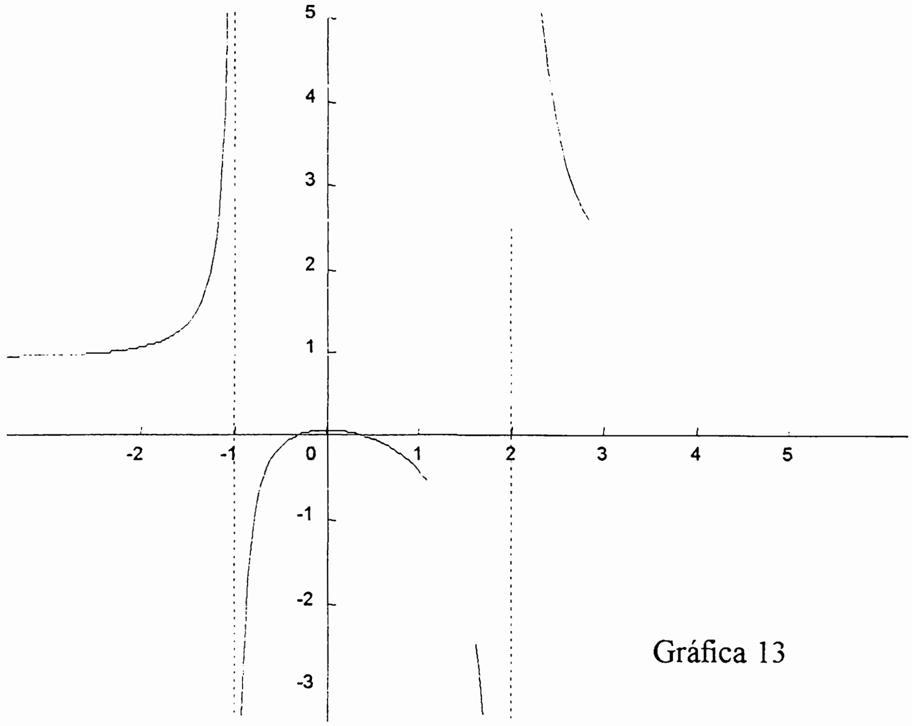
Intervalo	*(-∝, -1)*	*(-1, 0)*	*(0, 2)*	*(2, ∝)*
Prueba de signo	f(-2)= 1	F(-1/2)= -1/5	f(1)= -1/2	F(3)= 9/4
Signo de f(x)	+	-	-	+
Posición de la gráfica	Por debajo del eje X	Por encima del eje X	Por debajo del eje X	Por encima del eje X

Paso 4. Dada la información de la cuarta columna del paso 3 procedemos como se indica a continuación.

a) Considérese la asíntota vertical X= -1; como la gráfica esta por encima del eje X en ($-\infty$, -1), se deduce que

$$f(x)\rightarrow \infty \text{ cuando } x\rightarrow -1^{+}$$

En la siguiente figura se señalan estos hechos trazando porciones de la gráfica a cada lado de X= -1 ó de x = 2



Gráfica 13

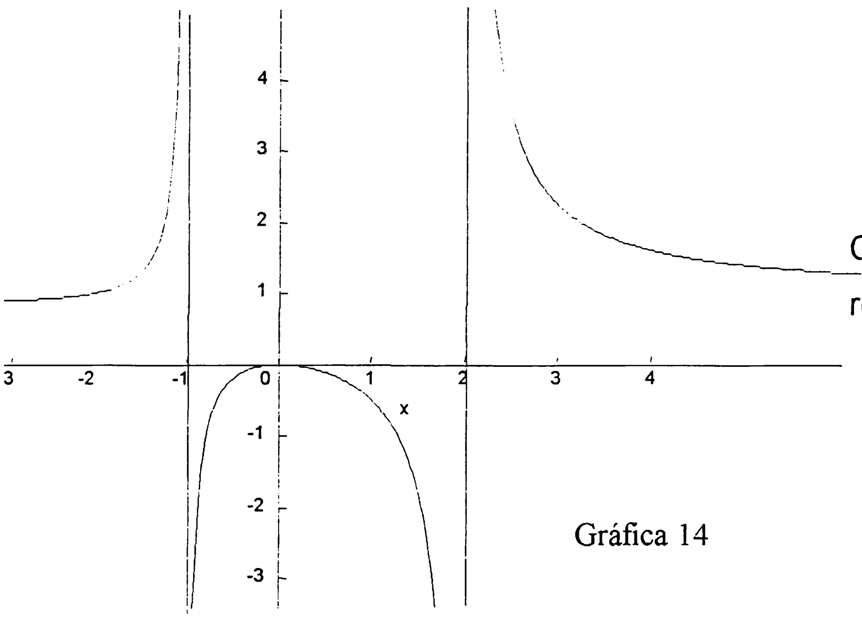
b) Considérese la asíntota vertical X=2; la gráfica esta por debajo del eje X en el intervalo (0, 2) y asi

$$f(x)\rightarrow \infty \text{ cuando } x\rightarrow 2^{+}$$

Paso 5. Por la información de la tabla en el paso 3, sabemos que la gráfica esta por debajo del eje X tanto en el intervalo (-1, 0) como en el (0. 2). Por consiguiente la gráfica toca, pero no cruza, el eje X en (0, 0).

Paso 6. El numerador y el denominador de f(x) son del mismo grado y los coeficientes principales de ambos son 1. por ello, utilizando la parte ii) del teorema de las asíntotas horizontales, la recta Y= 1/1 = 1 es una asíntota horizontal. Se indica esta recta con línea punteada, como se representara en la siguiente gráfica.

Paso 7. Haciendo uso de la información de los pasos 4, 5, 6 y situando varios puntos, obtenemos la gráfica.



$$Y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

Con esta gráfica queda resuelto el ejemplo 4.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

Gráfica 14

Para comprobar que la gráfica corta la asíntota horizontal en X= -2. Determinando otros puntos de la gráfica se puede verificar que este se encuentre por debajo de la asíntota horizontal cuando X< -2 y por encima de ella cuando –2< X < -1.

Ejemplo 5. Trazar la gráfica de f si.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^4+1}$$

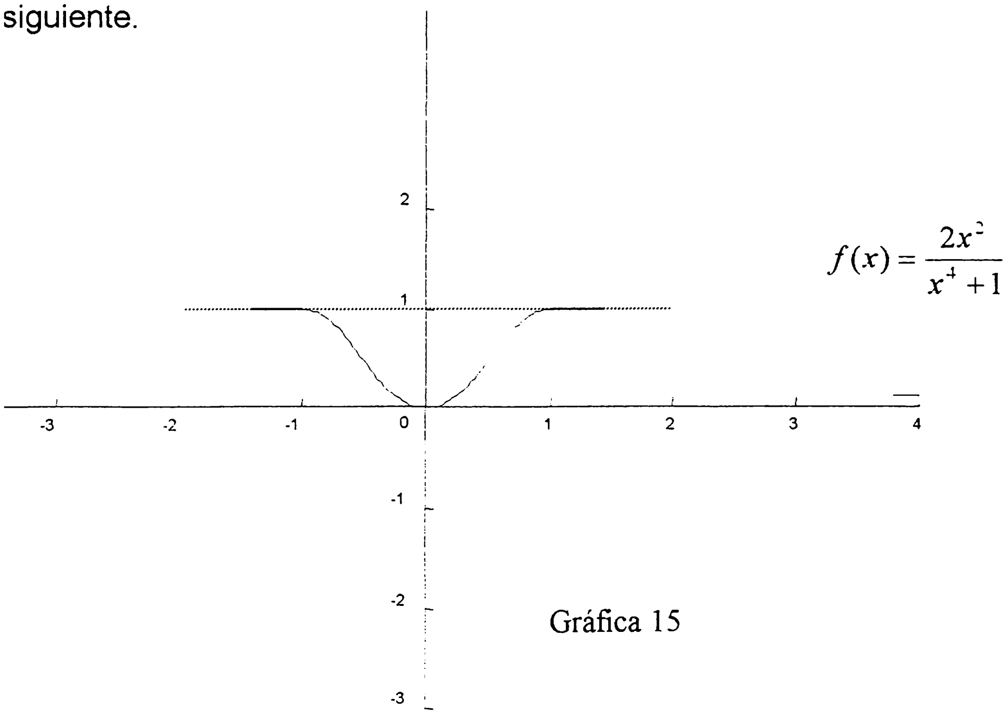
Solución

Para este ejemplo no escribiremos formalmente todos los pasos. Nótese que como f(-x) = f(x), la función es par; por esta razón, la gráfica es simétrica respecto al eje Y.

La gráfica corta al eje X en (0, 0), no hay asíntotas verticales por que el denominador de f(x) son del mismo grado.

Puesto que los coeficientes principales son 2 y 1, respectivamente, de la parte ii) del teorema de las asíntotas horizontales (si n=k, entonces la recta $Y = \frac{a_n}{b_k}$ es una horizontal) se sigue que la recta y = 2/1 = 2 es una asíntota horizontal. Esta recta se representa con línea punteada en la siguiente gráfica.

La representación de varios puntos y la simetría respecto al eje dan la gráfica siguiente.



Gráfica 15

Si $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ para polinomios g(x) y h(x) y si el grado de g(x) es mayor en uno que el grado de h(x), entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua $Y = ax + b$; es decir, la gráfica se acerca a esta línea cuando X→ ∝ o cuando X→ -∝. Para determinar la asíntota oblicua puede utilizarse la división para expresar a f(x) en la forma

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=(ax+b)+\frac{r(x)}{h(x)}$$

En donde r(x)= 0 o el grado de r(x) es menor que el grado de h(x). De la parte i) del teorema de las asíntotas horizontales (Sea $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1 x + b_0}$) se sigue que $\frac{r(x)}{h(x)}$ →0 cuando X→ ∝ o cuando X→ -∝ por consiguiente, f(x) se acerca mas y mas a $ax+b$ conforme |X| crece sin limite.

Ejercicios.

a) Trace la gráfica de las siguientes Funciones.

1) $f(x)=\frac{1}{x+2}$

2) $f(x)=\frac{-2}{x+4}$

3) $f(x)=\frac{x}{x-5}$

4) $f(x)=\frac{4}{(x-1)^2}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

6) $f(x)=\dfrac{5x}{4-x^2}$

7) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-7x+10}$

b) Para las siguientes funciones encuentre las asíntotas verticales y oblicuas. Trace la gráfica de f.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+1}$

2) $f(x)=\dfrac{8-x^3}{x+1}$

3) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$

4 Funciones Logarítmicas

Las funciones logarítmicas tienen aplicaciones en casi todos los campos del quehacer humano. Son particularmente útiles en estudio de la química, biología, física y la ingeniería para describir la forma en que varían las cantidades. En este contenido se estudiarán las propiedades de estas funciones.

4.1 Funciones Logarítmicas.

Si $f(x) = a^x$ y $a > 1$, entonces f es creciente sobre todo $\mathbf{R}$, mientras que si 0< a <1, f es decreciente, por consiguiente, Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces f es biunívoca (o uno a uno) y por lo tanto tiene una función f^{-1}. La inversa de una función exponencial de base a se llama función logarítmica de base a y se representa por $\log_a$. Sus valores se representan como $\log_a (x)$ o como $\log_a x$, que se lee "logaritmo x de base a", puesto que

$$Y = f^{-1}(x) \text{ si y solo si } x = f(y)$$

Definición: $Y = \text{Log}_a\, x$ si y sólo si $x = a^y$

Puesto que el dominio y el contradominio de la función exponencial de base a son $\mathbf{R}$ y los número reales positivos, respectivamente, el dominio de su inversa $\log_a x$ son los números reales positivos, y su contradominio $\mathbf{R}$, por esta razón en la definición x>0 y Y está en $\mathbf{R}$.

Nótese que:

Si $Y = \log_a X$, entonces $X = a^y = a^{\log_a x}$

En palabras, $\log_a X$ es el exponente al que debe elevarse a para obtener X_1.

Ejemplos:

$\text{Log}_2\ 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$

$\text{Log}_5\ \frac{1}{25} = -2$ ya que $5^{-2} = \frac{1}{25}$

$\text{Log}_{10}\ 10000 = 4$ ya que $10^4 = 10000$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la definición de logaritmo.

Teorema

i) $a^{\log_a x} = x$ para todo $x > 0$
ii) $\log_a a = a$
iii) $\log_a 1 = 0$

La parte i) ya se ha demostrado . Para verificar ii) y iii) es suficiente observar que $a^1 = a$ y $a^0 = 1$, respectivamente.

Ejemplo 1: Calcular s en cada uno de los siguientes casos.

a) $\log_4 2 = s$
b) $\log_5\ s = 2$
c) $\log_s 8 = 3$

Solución:

a) Si $\log_4 2 = s$, entonces $4^5 = 2$ y de aquí $s = \frac{1}{2}$

b) Si $\log_5\ s = 2$, entonces $5^2 = s$ y de aquí $s = 25$

c) Si $\log_s 8 = 3$, entonces $s^3 = 8$ y de aquí $s = \sqrt[3]{8} = 2$

Solución:

Si $\log_4 (5+x) = 3$, entonces, por la definición de logaritmo, $5 + x = 4^3$ o bien $x + 5 = 64 = x = 64-5 = x = 59$, por consiguiente, la solución es $x = 59$.

Las siguientes leyes son fundamentales para trabajar con logaritmos de número positivos v y w.

4.2 Leyes de los logaritmos

i) $\text{Log}_a (u w) = \log_a u + \log_a w$

ii) $\log_a \left(\frac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$

iii) $\log_a (u^c) = c \log_a u$ para todo número real c

Demostración:

Para demostrar i) empezamos por hacer

$r = \log_a u$ y $s = \log_a w$

Por la definición de logaritmo, esto implica que $a^r = u$ y $a^s = w$, por lo tanto,

$a^r a^s = u w$

y de aquí $a^{r+s} = uw$

Usando otra vez la definición de logaritmo, la ultima ecuación es equivalente a $r + 3 = \log_a (uw)$.

Sustituyendo r y s del primer paso de la demostración, obtenemos:

$\log_a u + \log_a w = \log_a uw$

Esto completa la demostración i)

Para demostrar ii) empezamos como en la demostración i) pero esta vez a dividir a^r entre a^s, de este modo.

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{u}{v} \text{ o bien } a^{r-s} = \frac{u}{w}$$

La última ecuación por la definición de logaritmo, es equivalente a $r - s = \log_a \left(\frac{u}{w}\right)$

Sustituyendo r y s, obtenemos

$$\log_a u - \log_a w = \log_a \left(\frac{u}{w}\right)$$

Esto prueba la ley ii)

Finalmente, si c es cualquier número real entonces

$(a^r)^c = u$ o bien $a^{cr} = u^c$

De acuerdo con la definición de logaritmo, la última igualdad implica que $c_r = \log_a u^c$.

Sustituyendo r obtenemos

$c \log_a u = \log_a u^c$

Esto demuestra la iii)

En los siguientes ejemplos muestran como se utilizan las leyes de los logaritmos.

Ejemplo 3: Si $\log_a 3 = 0.4771$ y $\log_a 2 = 0.3010$, calcule las siguientes expresiones.

a) $\log_a 6$

b) $\log_a \frac{3}{2}$

c) $\log_a \sqrt{2}$

d) $\dfrac{\log_a 3}{\log_a 2}$

Solución:

a) Puesto que 6 = 2.3 podemos usar la ley i) para obtener

$\log_a = 6 \log_a (2.3) = \log_a 2 + \log_a 3$

$= 0.4771 + 0.3010 = 0.7781$

) Por la ley ii) tenemos

$\log_a \dfrac{3}{2} = \log_a 3 - \log_a 2$

$= 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$

) Usando la ley iii) se tiene

$\log_a \sqrt{2} = \log_a 2^{1/2} = \dfrac{1}{2} \log_a 2$

$= \dfrac{1}{2}(0.3010) = 0.1505$

) No existe ninguna ley de logaritmos que permita simplificar $\dfrac{\log_a 3}{\log_a 2}$ por lo tanto, dividimos 0.4771 entre 0.3010 y obtenemos la aproximación 1.585. Es importante notar la diferencia entre este problema y el planteado en la parte b).

Ejemplo 4: Resolver cada una de las siguientes ecuaciones

a) $\text{Log}_2 (2x+3) = \log_2 11 + \log_2 3$

b) $\text{Log}_4 (x+6) - \log_4 10 = \log_4 (x-1) - \log_4 2$

Solución:

a) Usando la ley i), la ecuación dada puede escribirse

$\text{Log}_2 (2x+3) = \log_2 = (11.3)$

o bien $\log_2 (2x+3) = \log_2 (33)$

De aquí tenemos que, como las bases son iguales

$2x + 3 = 33$ o bien $2x = 30$

por lo tanto, la solución es $x = 15$

b) La ecuación dada es equivalente a

$\log_4 (x + 6) - \log_4 (x + 1) = \log_4 10 - \log_4 2$

aplicando la ley ii), obtenemos

$$\log_4 \left(\frac{x+6}{x-1}\right) = \log_4 \frac{10}{2} = \log_4 5$$

de aquí $\frac{x+6}{x-1} = 5$

$$5 = \frac{x+6}{x-1}$$

$$5x - 5 = x + 6$$

$$5x - x = 6 + 5$$

$$4x = 11$$

o bien $4x = 11$

La solución es $x = \frac{11}{4}$

Soluciones extrañas aparecen algunas veces en el proceso de resolución de ecuaciones logarítmicas, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Resolver la ecuación $2 \log_7 x = \log_7 36$

Solución: Aplicando la ley iii) obtenemos $2 \log_7 x = \log_7 x^2$ y haciendo la sustitución en la ecuación dada llegaremos a $\log_7 x^2 = \log_7 36$.

Por lo tanto, $x^2 = 36$ y de aquí $x = 6$ o bien $x = -6$, sin embargo, $x = -6$ no es solución de la ecuación original puesto que x debe ser positiva para que $\log_7 x$ exista.

Así existe, una única solución $\mathbf{x = 6}$

La dificultad anterior pudo haberse evitado escribiendo la ecuación como

$\log_7 x = \frac{1}{2} \log_7 36 = \log_7 36^{1/2} = \log_7 = 6$ y entonces, $x = 6$

Las leyes de los logaritmos suelen usarse como los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 6:

Expresar $\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}$ en términos de logaritmos de x,y, y z.

Solución: usando las tres leyes de los logaritmos y escribiendo $\sqrt{y}$ con $y^{1/2}$, obtenemos

$$\log_a \frac{x^3 y^{1\ 2}}{z^2} = \log_a (x^3y^{1/2}) - \log_a z^2$$

$$= \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a z^2$$

$$= 3\log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - 2 \log_a z$$

Ejemplo 7:

Expresar en términos de logaritmos

$$\frac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z = \log_a (x^2\text{-}a)^{1/3} - \log_a y - \log_a z^4$$

$$= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - (\log_a y - \log_a z^4)$$

$$= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - \log_a yz^4$$

$$= \log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4}$$

Es importante notar que hay leyes para expresar $\log_a (u + w)$ o bien $\log_a (u - w)$ en términos de logaritmos más simples. Es evidente que

$$\log_a (u+w) \neq \log_a u + \log_a w,$$

puesto que la última suma corresponde a $\log_a (uw)$. De la misma manera

$\log_a (u-w) \neq \log_a u - \log_a w$

Frecuentemente ocurren funciones logarítmicas en aplicaciones. Efectivamente, si dos variables u y v, la v es una función logarítmica de u.

Ejemplo:

El número N de bacterias en cierto cultivo después de t horas, esta dado por $N = (1000)\ 2^t$. Exprese t como una función logarítmica de N con base 2.

Solución: Si $N = (1000)\ 2^t$, entonces $2^t = \dfrac{N}{1000}$. Cambiando a la forma logarítmica $t = \log_2 \dfrac{N}{1000}$.

Ejercicios 4.1

Haciendo uso de teoremas y leyes de los logaritmos efectúe los siguiente ejercicios.

1) Cambie las ecuaciones dadas, a la forma logarítmica
   a) $4^3 = 64$
   b) $2^7 = 128$
   c) $10^{-3} = 0.001$
   d) $t^r = s$

2) Cambien las ecuaciones dadas
   a) $\log_{10} 1000 = 3$
   b) $\log_3 \dfrac{1}{243} = -5$
   c) $\log_7 1 = 0$
   d) $\log_t r = p$

3) Calcule las expresiones dadas

a) $\log_4 \frac{1}{16}$

b) $\log_{10} 100$

c) $10^{\log_{10} 5}$

4) Resuelva las ecuaciones dadas

a) $\log_3 (x-4) = 2$

b) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

c) $\log_5 x^2 = -2$

d) $\log_6 (2x - 3) = \log_6 12 - \log_6 3$

5) Exprese el logaritmo dado en términos de los logaritmos de x, y y z

a) $\text{Log}_a \frac{x^2 y}{z^3}$

b) $\text{Log}_a \frac{\sqrt{xz^2}}{y^4}$

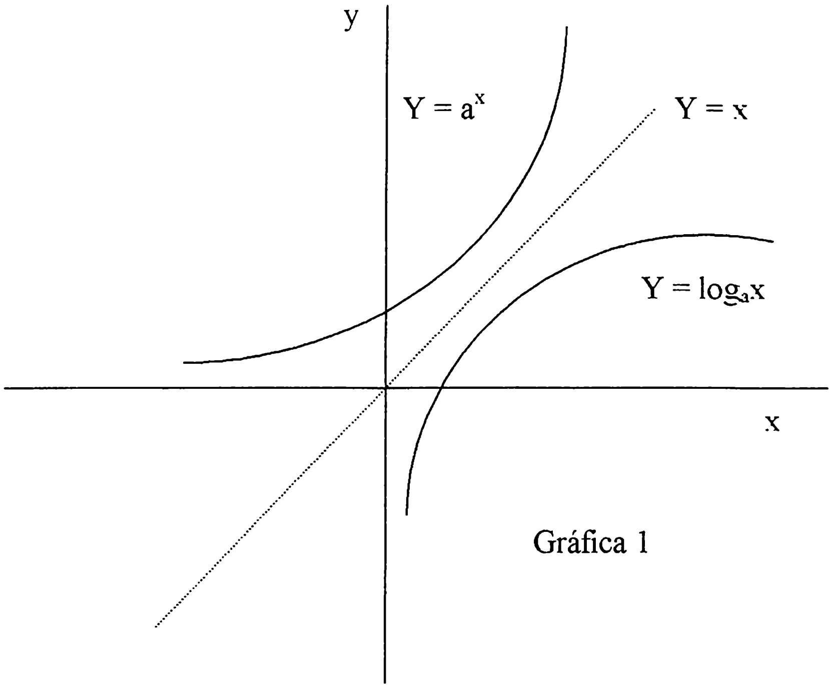
c) $\text{Log}_a \sqrt{x\sqrt{yz^3}}$

4.3 Gráficas de las funciones logarítmicas.

Puesto que la función logarítmica $\log_a$ es la inversa de la función exponencial de base a, la gráfica de $y = \log_a x$ se puede obtener reflejando la gráfica de $y = a^x$ a través de la recta y = x, que biseca los cuadrantes I y III. Este hecho se ilustra en la siguiente gráfica para el caso en que a>1.

También es posible trazar localizando algunos puntos puesto que

$y = \log_a x$ si y solo si $x = a^y$



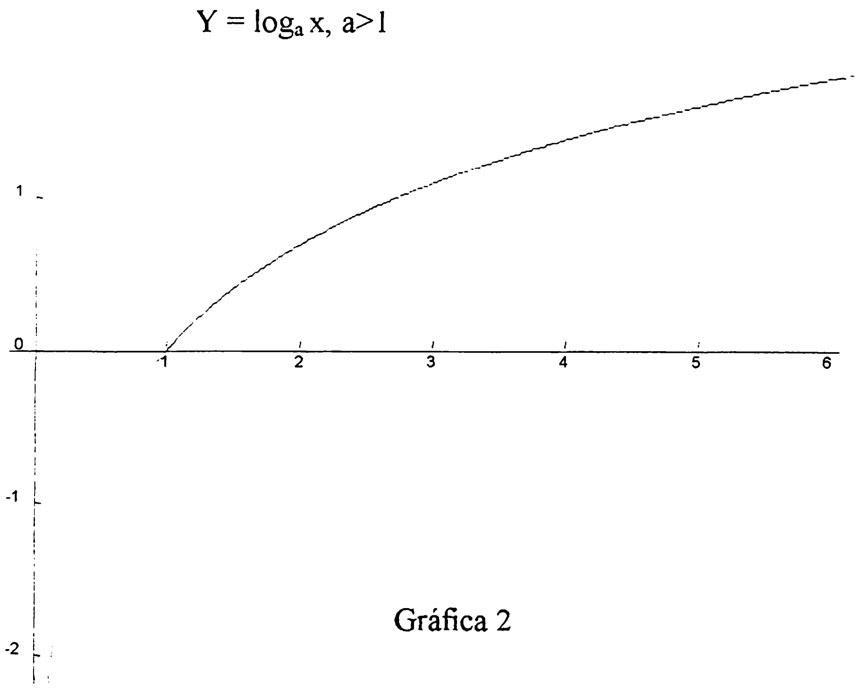
Gráfica 1

Las coordenadas de los puntos de la gráfica de $y = \log_a x$ se puede encontrar usando la ecuación $x = a^y$. Esto conduce a la siguiente tabla.

Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
X	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3

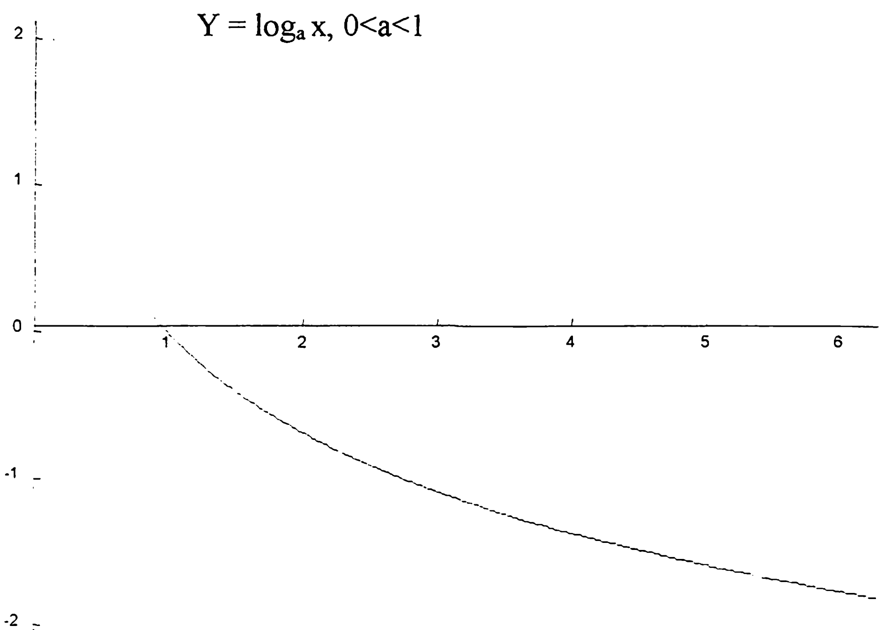
Si a>0, se obtiene la siguiente figura i). En este caso, la función f es creciente en todo su dominio. Si 0 < a < 1, la gráfica tiene la forma que se ilustra en la figura ii) en donde f es una función decreciente.

figura i)



Gráfica 2

figura ii)



Gráfica 3

Funciones definidas por expresiones de la forma $\log_a P$. en donde P es alguna expresión en x, ocurren con frecuencia tanto en matemáticas como en sus aplicaciones.

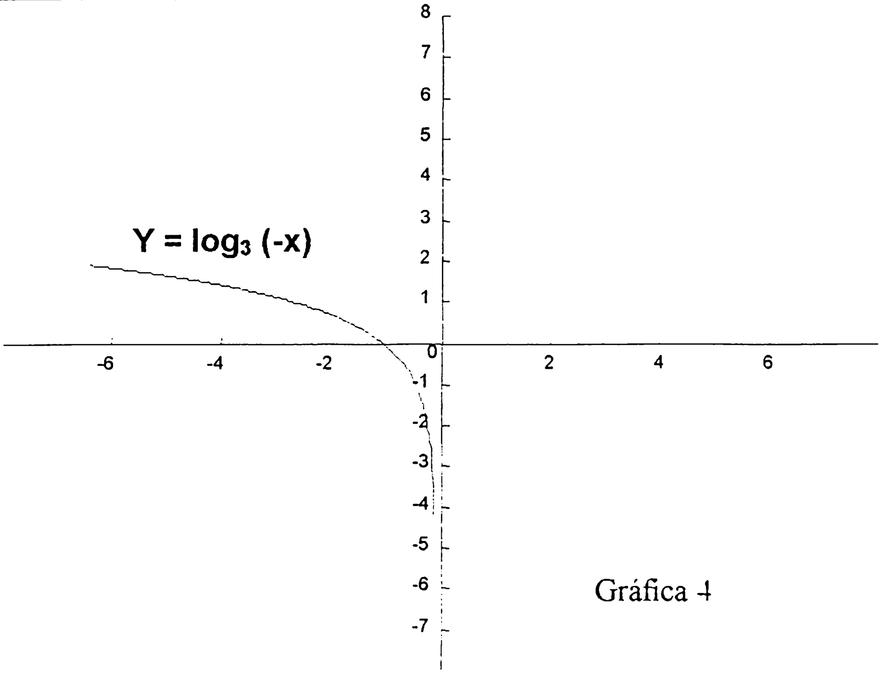
Las funciones de este tipo pertenecen a la familia logarítmica; sin embargo , las gráficas pueden diferir de las presentadas en las figuras anteriores y las que a continuación se presentaran.

Ejemplo 1: Trazar la gráfica de f siendo $f(x) = \log_3(-x)$ para $x< 0$.

Solución: si $x<0$, entonces $-x > 0$, y por lo tanto $\log_3(-x)$ existe.

Queremos representar gráficamente la ecuación $y = \log_3(-x)$ la cual, por la definición del logaritmo, es equivalente a $3^y = -x$. Entonces para encontrar puntos en la gráfica de f, se pueden sustituir valores de y en la ecuación $x = -(3^y)$. La siguiente tabla muestra las coordenadas de algunos de varios puntos.

Y	-2	-1	0	1	2
X	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9



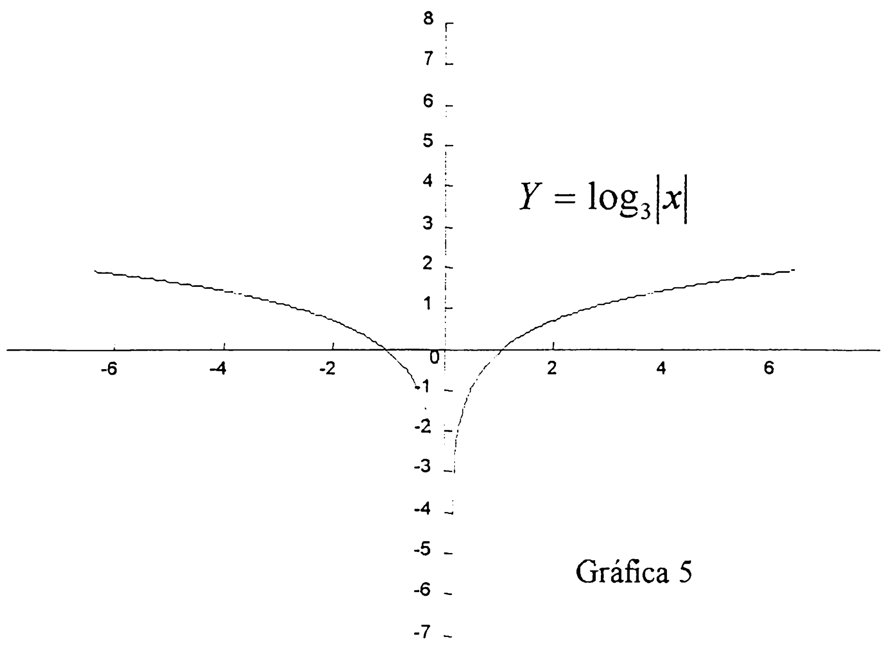
Gráfica 4

Localizados estos puntos se trazo la gráfica anterior.

Ejemplos 2: Trazar la gráfica de la ecuación

Y = $\log_3 |x|$ si $x \neq 0$

Solución: Puesto que $|x| > 0$ para toda $x \neq 0$, existen puntos en la gráfica correspondientes tanto a valores negativos de x como a valores positivos, si x > 0, entonces $|x| = x$ y de aquí que del lado derecho del eje y, la gráfica coincide con la gráfica de y = $\log_3 x$, es decir con $x = 3^y$. Si x > 0 entonces $|x| = -x$ y la gráfica es la misma que la de y = $\log_3 (-x)$ (la grafica del ejemplo 1).



Gráfica 5

Ejemplo3: Trazar la gráfica de

a) Y = $\log_3$ (x-2)

b) $Y = \log_3 x - 2$

Solución:

a) Se puede obtener la gráfica de $Y = \log_3 (x-2)$ trasladando la gráfica de $Y = \log_3 x$ dos unidades hacia la derecha. Puesto que la gráfica de $Y = \log_3 x$ es parte de la gráfica de la figura anterior que está a la derecha del eje Y, esto conduce al trazo de la siguiente figura i).

b) La gráfica de $Y = \log_3 x-2$ se puede obtener trasladando la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo. Así se obtiene el trazo de la figura ii). Nótese que la intercepción x esta dada por $\log_3 x = 2$ o por $x = 3^2 = 9$

)

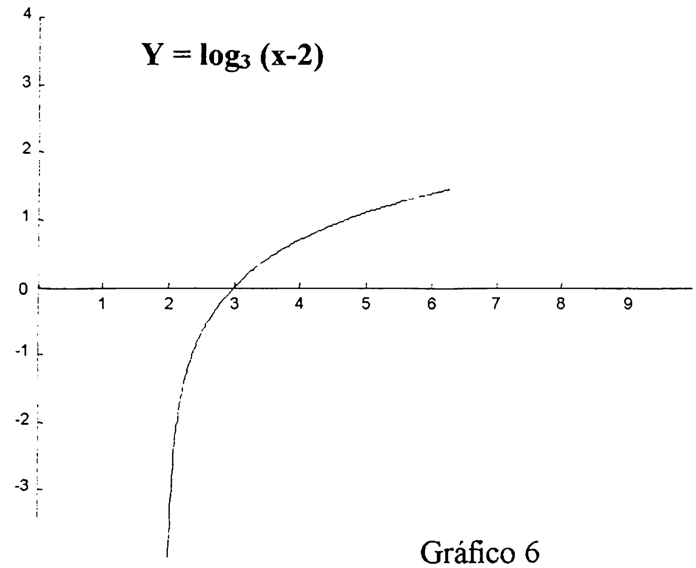


Gráfico 6

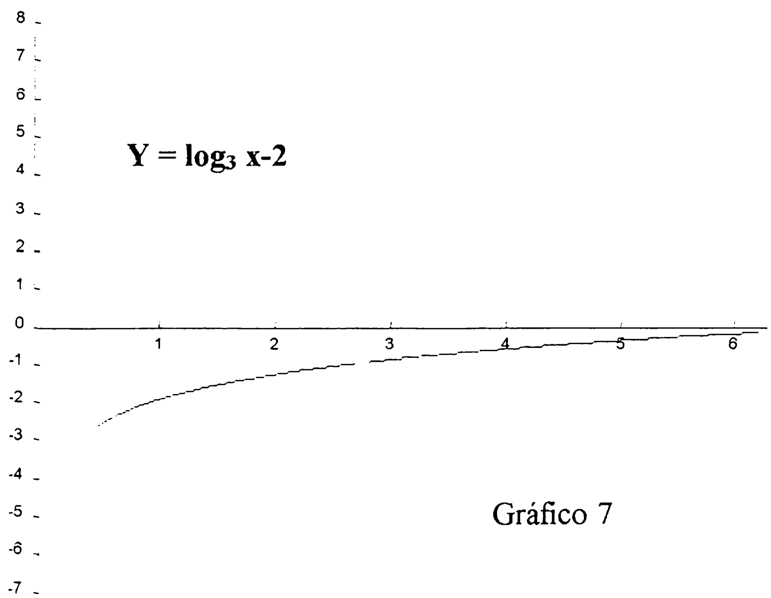


Gráfico 7

Ejercicios 4.2

Represente gráficamente la función dada.

1) $f(x) = \log_2 x$

2) $f(x) = \log_4 x$

3) $f(x) = \log_2 (x+3)$

4) $f(x) = \log_2 x + 3$

5) $f(x) = \log_3 (3x)$

6) $f(x) = 3\log_3 x$

7) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

8) $f(x) = \log_3 \left(\frac{1}{x}\right)$

9) $f(x) = \frac{1}{(\log_3 x)}$

10) $f(x) = \log_2 |x-5|$

5 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

El origen de la trigonometría data de hace mas de 2000 años, cuando los griegos necesitaron métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos.

El concepto de Angulo es central en trigonometría. Un ángulo tiene tres partes: un lado inicial, uno terminal y un vértice (punto de intercepción de los dos lados). Diremos que un ángulo esta en posición canónica si su lado inicial es la parte positiva del eje X y su vértice esta en el origen. Suponiendo que los(as), estudiantes están familiarizados con la medida de ángulo en grados. Suele utilizarse θ (la letra griega Zeta minúsculas) para simbolizar el ángulo y su medida. Clasificamos los ángulos en agudos (entre 0° y 90°) y obtusos (entre 90° y 180°). Los ángulos positivos se miden en sentido contrarios al de los agujas del reloj a partir del lado inicial. Los ángulos negativos se miden en sentido delas agujas del reloj.

No podemos asignar medida a un ángulo sabiendo tan solo dónde están situados sus lados inicial y final. Hay que saber cómo ha girado el lado terminal. Por ejemplo la siguiente figura (1) muestra que un ángulo de -45° tiene el mismo lado terminal que uno de 315°. Tales ángulos se dicen ser Coterminales.

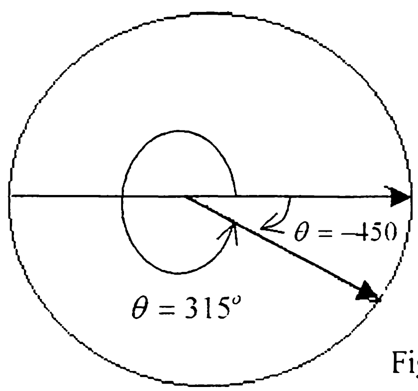


Figura 1

Un ángulo mayor que 360 grados es aquel cuyo lado terminal ha dado mas de un giro completo en sentido contra el reloj como lo representa la siguiente figura (2)

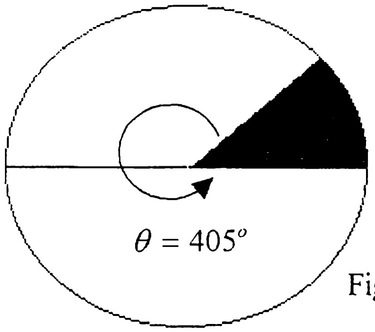
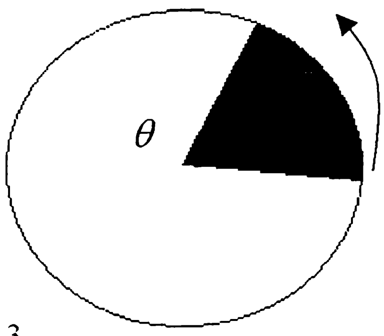


Figura 2

Y ángulos menores que –360º pueden generarse girando más de una vuelta su lado terminal en el sentido del reloj.

5.1 Medida en Radianes

Un segundo modo de medir ángulos es en radianes. Para asignar medida en radianes a un ángulo θ, consideramos θ como un ángulo central de un sector circular de radio 1, como en la siguiente figura (3)



La longitud del arco del sector; esta medida de θ en radianes

Figura 3

La medida en radianes de θ se define como la longitud del arco de ese sector. Recordemos que todo circulo mide $2\pi r$ y al ser un circulo unidad (r = 1), es simplemente 2π, concluiremos que la medida de un ángulo de 360º es en radianes 2π. En otras palabras, 360º = 2π radianes.

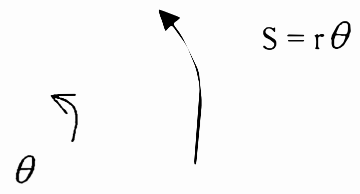


Figura 4

Usando medida en radianes, tenemos una fórmula simple para la longitud s de un arco circular de radio r como se ve en la figura 4

Longitud de arco = s = $r\theta$ (θ medida en radianes).

Conviene memorizar las conversiones más comunes, véase la siguientes figuras

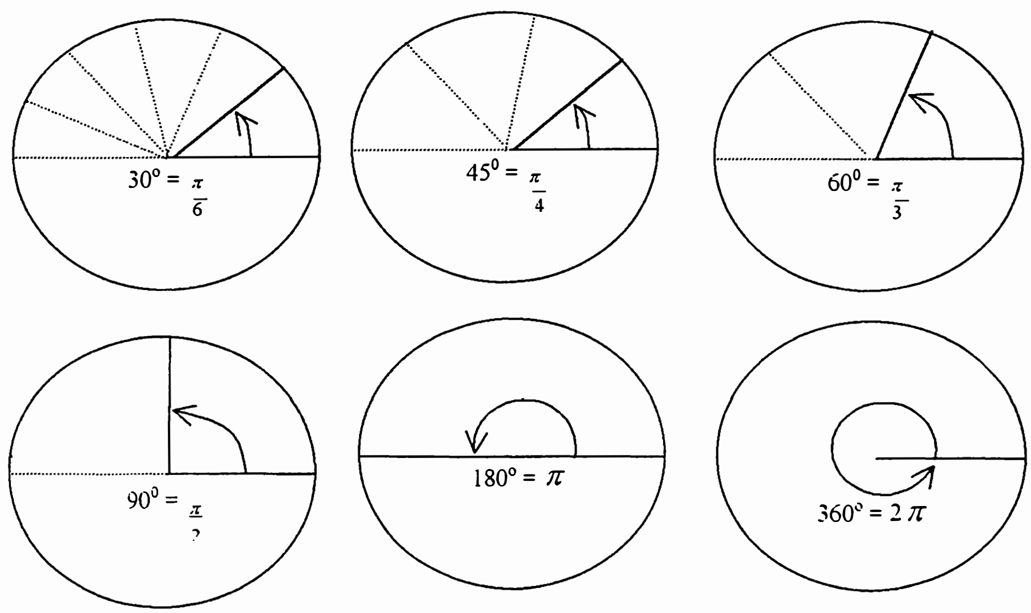


Figura 5

5.2 Reglas de Conversión

$180° = \pi$ radianes

Grados $\Rightarrow$ radianes

Radianes $\Rightarrow$ Grados

1 radian = $\dfrac{180^o}{\pi}$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianes

Ejemplo 1: Conversión entre grados y radianes

a) $40° = (40)\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{6.2832}{9} = \dfrac{2\pi}{9}$ radianes

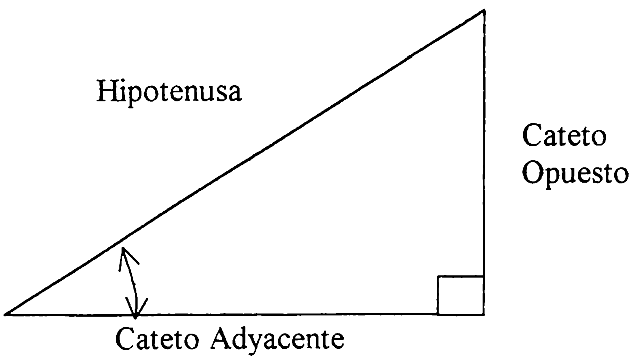
b) $-270° = (-270)\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = -\dfrac{3\pi}{2}$ radianes

c) $-\dfrac{\pi}{2}$ radianes $= \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = -90°$

d) $\dfrac{9\pi}{2}$ radianes $= \left(\dfrac{9\pi}{2}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 810°$

5.3 Definición de las seis Funciones Trigonométricas

Definición por triángulos rectángulos, donde $0 < \theta < \pi/2$



$$Sen\,\theta = \frac{op}{hip} \qquad Cosec\theta = \frac{hip}{op}$$

$$Cos\,\theta = \frac{ady}{hip} \qquad Sec\theta = \frac{hip}{ady}$$

$$Tg\,\theta = \frac{op}{ady} \qquad Ctg\theta = \frac{ady}{op}$$

Figura 6

Definición como funciones, donde θ es cualquier ángulo referimos a la figura 7

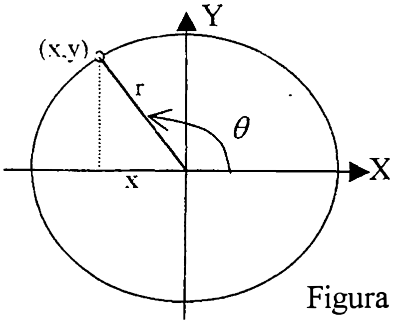


Figura 7

$$r = \sqrt{x^2 + y^3}$$

$\text{Sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\text{Cosec}\theta = \frac{r}{y}$

$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\text{Sec}\theta = \frac{r}{x}$

$\text{tg}\theta = \frac{y}{x}$ $\quad$ $\text{ctg}\theta = \frac{x}{y}$

Las siguientes fórmulas son consecuencia directa de las definiciones

$\text{Cosec}\theta = \frac{1}{sen\theta}$ $\quad$ $\text{Sec}\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\quad$ $\text{ctg}\theta = \frac{1}{tg\theta}$

$\text{tg}\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$ $\quad$ $\text{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{sen\theta}$

Además puesto que

$$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Podemos obtener fácilmente la identidad de Pitágoras

$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2 = 1$

Nótese que esta usando $\text{Sen}^2\theta$ para denotar $(\text{Sen}^2\theta)^2$. Otras identidades se expondrán a continuación.

5.4 Identidades Trigonométricas

Identidades pitagóricas

$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

$\text{Tg}^2\ \theta + 1 = \text{Sec}^2\theta$

$\text{Ctg}^{\,2}\ \theta + 1 = \text{Cosec}^2\ \theta$

Suma o diferencia de los ángulos

$\text{Sen}\,(\theta \pm \phi) = \text{sen}\ \theta\ \text{Cos}\,\phi \mp \text{Cos}\ \theta\ \text{Sen}\,\phi$

$\text{Cos}\,(\theta \pm \phi) = \text{Cos}\ \theta\ \text{Cos}\,\phi \mp \text{Sen}\ \theta\ \text{Sen}\,\phi$

$\text{Tg}\,(\theta \pm \phi) = \dfrac{tg\theta \pm tg\phi}{1 \pm tg\theta tg\phi}$

Angulo Doble

$\text{Sen}\ 2\ \theta = 2\ \text{Sen}\ \theta\ \text{Cos}\ \theta$

$\text{Cos}\ 2\ \theta = 2\ \text{Cos}^2\ \theta - 1$

$= 1 - 2\ \text{Sen}^e\ \theta$

$= \text{Cos}^2\ \theta - \text{Sen}^2\ \theta$

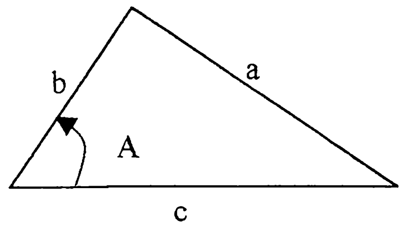
Angulo Mitad

$\text{Sen}^2\ \theta = \frac{1}{2}\,(1 - \text{Cos}\ 2\theta)$

$\text{Cos}^2\ \theta = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos}\ 2\theta)$

Ley de los Cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



Fórmula de reducción

$\text{Sen}(-\theta) = -\text{Sen}\theta$

$\text{Cos}(-\theta) = \text{Cos}\theta$

$\text{Tg}(-\theta) = -\text{tg}\theta$

$\text{Sen}\,\theta = -\text{Sen}(\theta - \pi)$

$\text{Cos}\,\theta = -\text{Cos}(\theta - \pi)$

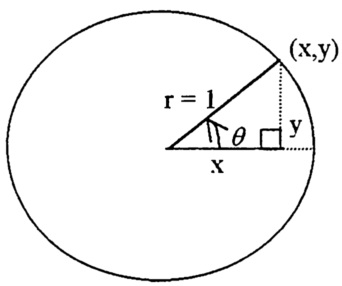
$\text{Tg}\,\theta = \text{Tg}(\theta - \pi)$

Notas: Todos los ángulos en el resto del contenido de (funciones trigonométricas) se medirán en radianes, salvo que se especifique lo contrario. En otras palabra, cuando escribamos **Sen3** queremos significar el seno de 3 radianes y solo si escribimos **Sen3°** nos estaremos refiriendo a 3 grados.

5.5 Evaluación de Funciones trigonométricas.

Hay dos métodos frecuentes para evaluarlas : **aproximación decimal** con una calculadora (o una tabla).

Evaluaciones **exactas** usando identidades trigonométricas y fórmulas de geometría se mostrará primero el método por fórmulas de geometría.

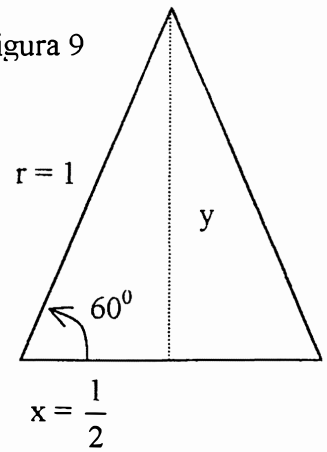


Ejemplo 2

Calcular seno, coseno, tangente de $\frac{\pi}{3}$

Solución: Empezamos dibujando el ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ en posición canónica como en la siguiente figura:

Figura 9



Como $60^o = \frac{\pi}{3}$ radianes, obtenemos un triángulo equilátero con lados de longitud 1 y ángulo θ.

Como la altura de este triángulo bisecta su base, sabemos que $x = \frac{1}{2}$. Ahora bien, por el teorema de Pitágoras>

$$Y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

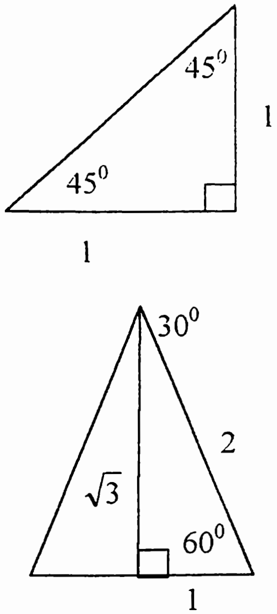
Así pues $\operatorname{Sen}\frac{\pi}{3} = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3} = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Tg}\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

La siguiente tabla presenta las medidas en radianes y en grados de varios ángulos frecuentemente, junto con los valores de Seno, Coseno y Tangente.

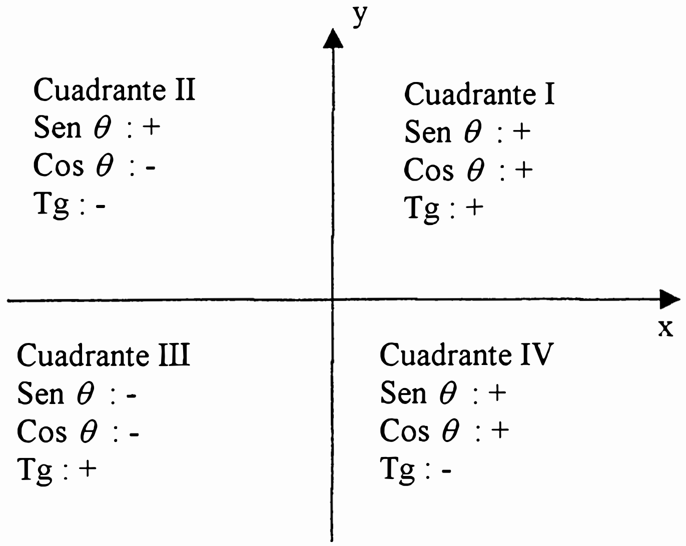
Figura 10

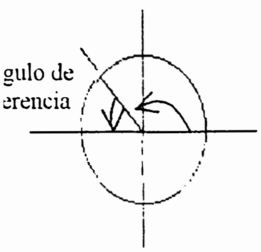


Ángulos Comunes del Primer Cuadrante

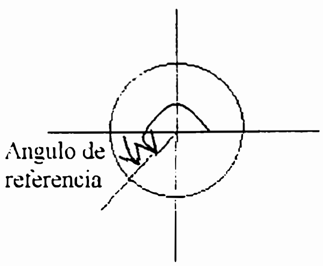
Grados	0	30º	45º	60º	90º
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Senθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Indefinido

En la figura 7 nótese r > 0 siempre. Así pues, los signos en cada cuadrante de x e y determinan los signos de las funciones trigonometricas puede verse en la figura 11

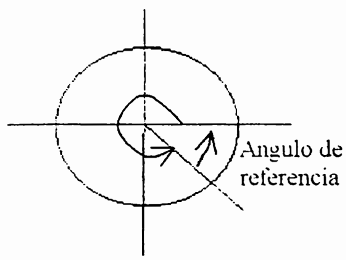




Cuadrante II
ıgulo de referencia $\pi - \theta$



Cuadrante III
Angulo de referencia $\theta - \pi$



Cuadrante IV
Angulo de referencia $2\pi - \theta$

Ejemplo 3

Evaluando funciones trigonometricas con ángulos de referencia.

Función	Cuadrante	Signo	Ángulo de Referencia	Valor
a) Sen $\frac{3\pi}{4}$	II	+	$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\text{Sen}\frac{3\pi}{4} = \text{Sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) Tg 330º	IV	-	$360^{\circ} - 330^{\circ} = 30^{\circ}$	Tg 330º = -tg 30º = $\frac{-\sqrt{3}}{3}$
c) Cos $\frac{7\pi}{6}$	III	-	$\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejemplo 4 Identidades Trigonometricas y Calculadoras

a) Por la fórmula de reducción sen(-θ) = -senθ, tenemos que

$$\text{Sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{Sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Utilizando la fórmula reciproca Secθ = $\frac{1}{\cos\theta}$, se obtiene

$$\text{Sec } 60^{\circ} = \frac{1}{\cos 60^{\circ}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

c) Usando una calculadora obtenemos

Cos (1, 2) $\approx$ 0.3624

Recuerde que 1, 2 viene dado en radianes, de modo que la calculadora debe de ponerse en modo radianes.

Resolución de ecuaciones trigonometricas. En los ejemplos anteriores 1, 3 y 4 vimos técnicas para evaluar funciones trigonometricas para valores dados de θ.

En los dos próximos ejemplos lo haremos de forma inversa: dado el valor de una función trigonometrica, ¿Cómo reducir θ? Por ejemplo, consideremos la ecuación:

$$\text{Sen}\,\theta = 0$$

Sabemos que $\theta = 0$ es una solución, pero no es la única.

Cualquiera de los valores siguientes lo es también:

$\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

Podemos simbolizar este conjunto infinito de soluciones como

$$\{\, n\pi : n \text{ entero} \,\}$$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$\text{Sen}\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solución: Para resolverla, hagamos dos observaciones:

1) El seno es negativo en los cuadrantes III y IV

2) $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Cambiando estas dos observaciones, concluimos que estamos buscando valores de θ en los cuadrantes III y IV que tengan ángulo de referencia $\frac{\pi}{3}$, en el intervalo $[0, 2\pi]$ los dos ángulos que cumplen eso son:

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{y} \quad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Finalmente podemos añadir 2 a cualquiera de esos ángulos para obtener el conjunto de soluciones

$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, n entero

o sea $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, n entero

Ejemplo 6

Resolver la ecuación por θ

Cos $2\theta = 2 - 3$ Senθ, o $\leq \theta \leq 2\pi$

Solución: Usando la identidad del ángulo doble Cos $2\theta = 1 -$ Sen$^2\theta$, obtenemos el siguiente polinomio (en Senθ)

$$1 - 2\,\text{Sen}^2\theta = 2 - 3\,\text{Sen}\theta$$

$$0 = 2\,\text{Sen}^2\theta - 3\,\text{Sen}\theta + 1$$

$$0 = (2\,\text{Sen}\theta - 1)(\text{Sen}\theta - 1)$$

Si 2 Senθ - 1 = 0, se tiene Sen$\theta = \frac{1}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$ o $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Si Senθ - 1 = 0, se tiene Senθ = 1 y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Así pues para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, hay tres soluciones de ecuación dada:

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \text{ o } \frac{\pi}{2}$$

5.6 Gráficas de las Funciones Trigonometricas

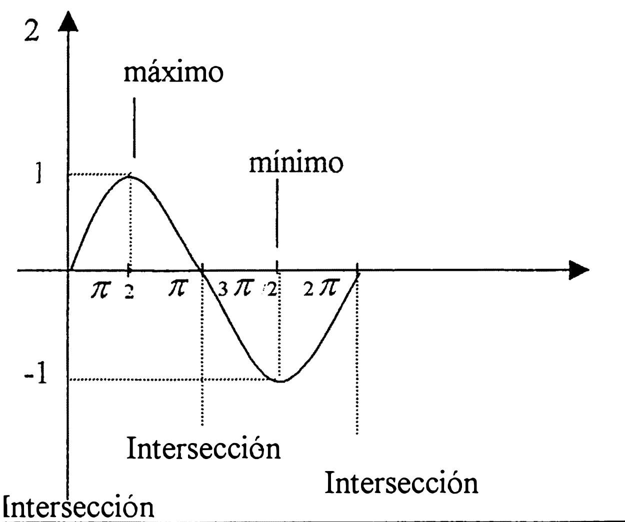
Para dibujar funciones trigonometricas en el sistema de coordenadas usual x, y, emplearemos la variable θ en el lugar de x, además cuando escribamos y=Senx o y=Cosx, entendemos que x puede tomar cualquier valor real y las funciones evalúan con x medido en radianes.

Nota: Este uso de x no es el mismo que en la definición de las seis funciones trigonometricas. En general, el contexto de cada momento permitirá distinguir entre ambos.

En primer lugar notemos que las seis funciones son periódicas.

Decimos que una función f es periódica si hay un número p $\neq 0$ tal que
$f(x+p) = f(x)$
Para todo x en el dominio de f_0. El dominio p positivo se llama **periodo** de f.
Tanto el seno como el coseno tienen período 2π y marcando varios puntos en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ obtenemos las gráficas de la siguiente tabla.

Y = Sen x	Y = Cos x



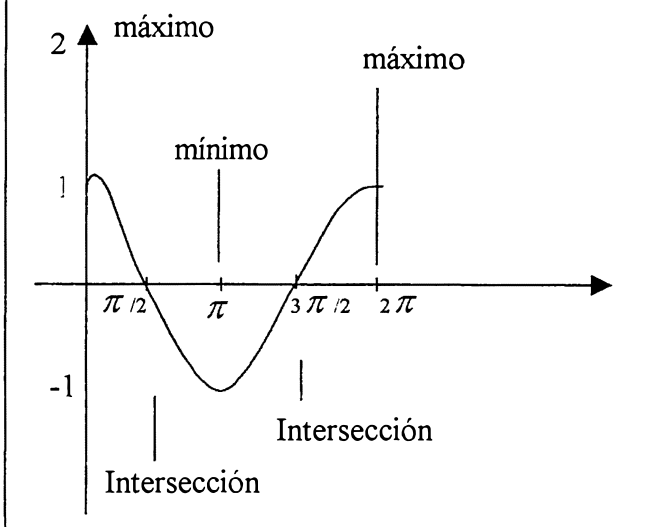


Figura 13

Obsérvese que el máximo valor de senx es 1 y el mínimo –1.

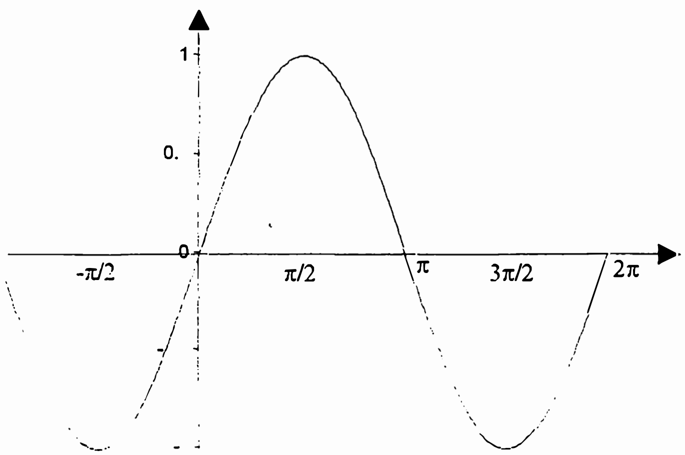
La amplitud de la función seno(ϑcoseno) se define como la mitad de la diferencia entre sus valores máximo y mínimo. Así que la amplitud de $f_{(x)}$ = Senx es 1.

La gráfica de la figura 14 muestra las gráficas de las seis funciones trigonometricas, con las que debe familiarizarse él, los lectores para ser capaz de dibujar otros más complicadas.

La gráfica de y = a sen bx oscila entre –a y a, luego tiene amplitud $|a|$. Además, como bx = 0 cuando x = 0 y bx = 2π cuando x = $\frac{2\pi}{b}$, podemos concluir que la función y=a sen bx tiene periodo $\frac{2\pi}{|b|}$. La siguiente tabla resume las amplitudes y períodos de varias funciones generales.

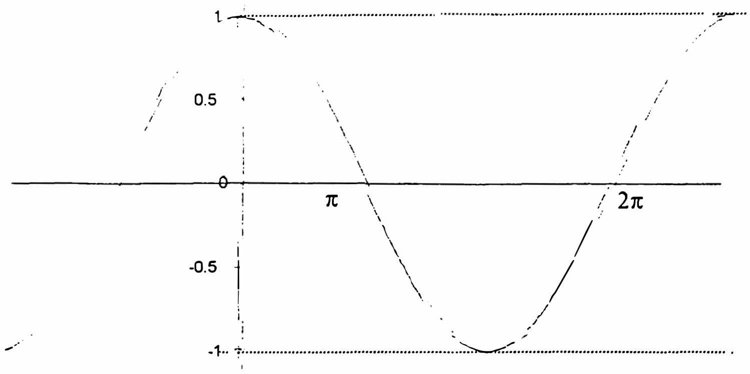
Función	**Período**	**Amplitud**
y = a sen bx o y = a cos bx	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a\rvert$
y = a tg bx o y = a ctg bx	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	-
y = a sec bx o y = a cosec bx	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	-

5.7 Graficas de las seis funciones trigonometricas



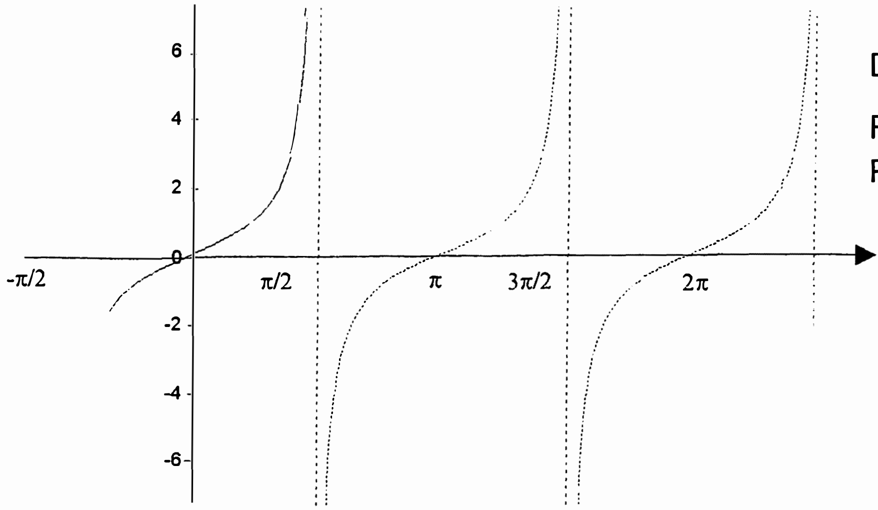
Dominio : Todos los reales
Recorrido: [-1,1]
Periodo : 2π

Gráfica 1



Dominio : Todos los reales
Recorrido: [-1,1]
Periodo : 2π

Gráfica 2

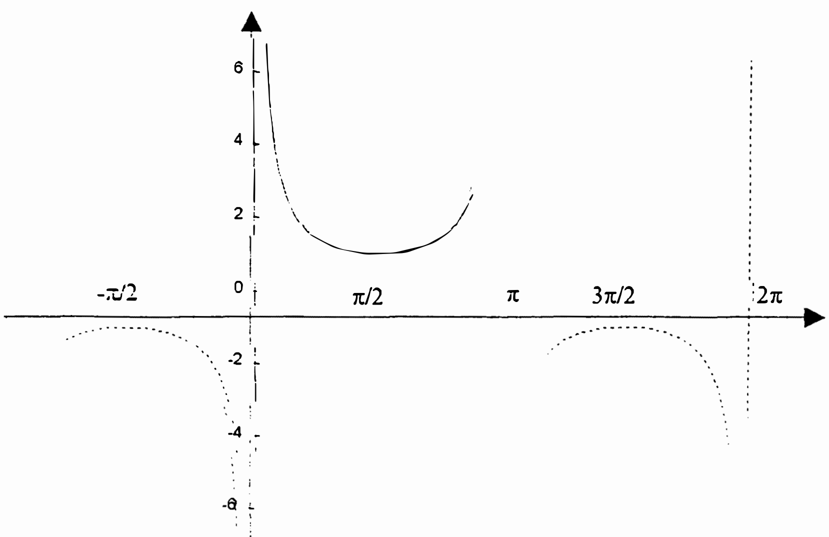


Dominio : Todo x $\neq (2\pi - 1)\dfrac{\pi}{2}$

Recorrido: $(-\alpha, \alpha)$

Periodo : 2π

Gráfica 3

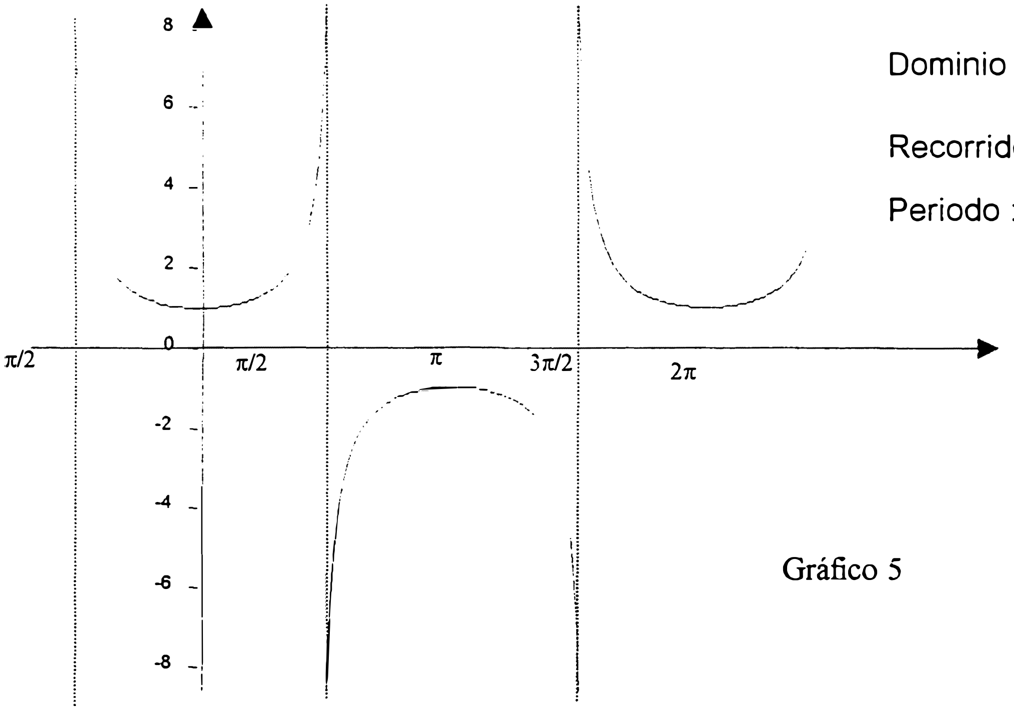


Dominio : todo x $\neq n\pi$

Recorrido: $(-\alpha,-1]$ y $[1,\alpha)$

Periodo : 2π

Gráfica 4

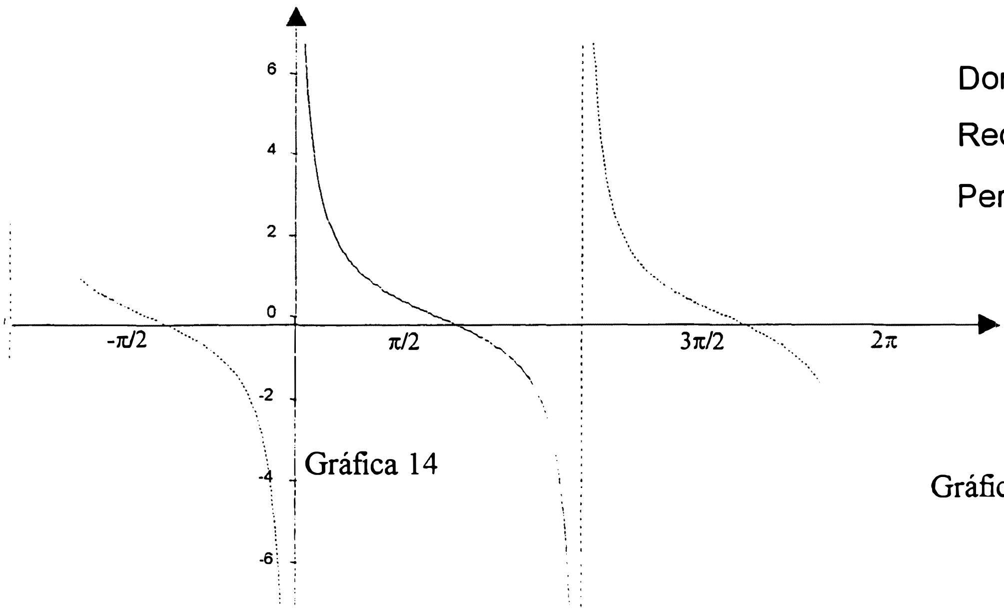


Dominio : todo x $\neq (2\pi - 1)\frac{\pi}{2}$

Recorrido: $(-\alpha,-1]$ y $[1,\alpha)$

Periodo :

Gráfico 5



Dominio : todo x $\neq n\pi$

Recorrido: $(-\alpha,\alpha)$

Periodo : π

Gráfica 6

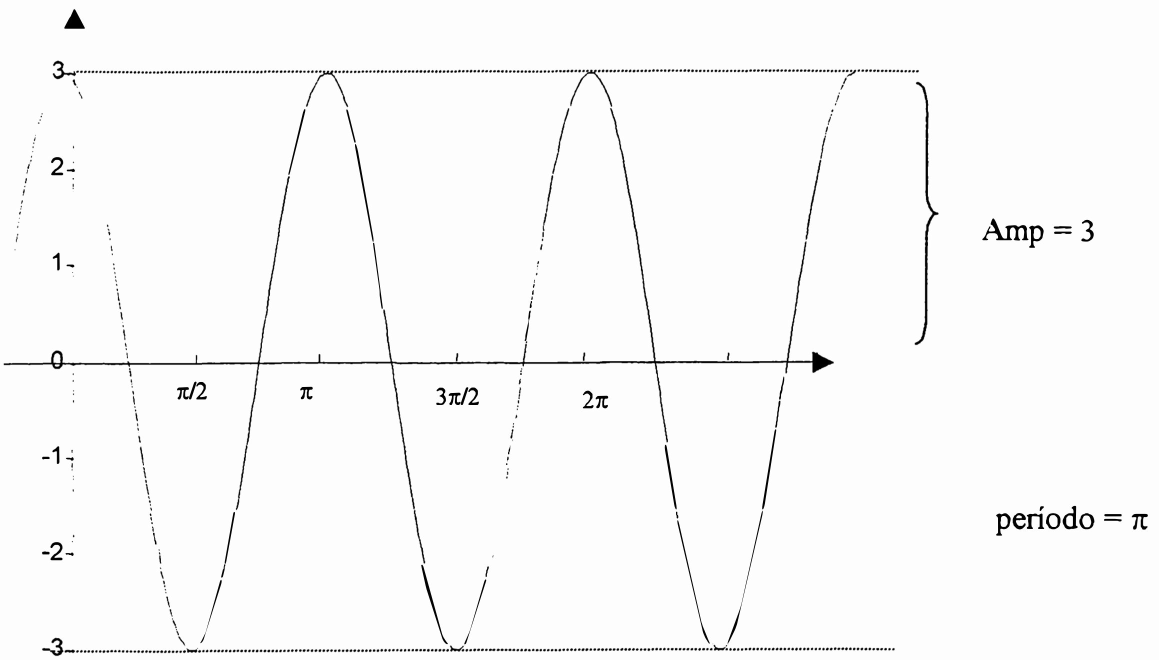
Ejemplo 7

Dibujando la gráfica de una función trigonometrica dibujar la gráfica de $f_{(x)} = 3 \cos 2x$

Solución: La gráfica de $f_{(x)} = 3 \cos 2x$ tiene

Amplitud: 3 Período $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Apelando a la forma básica de la gráfica del coseno, dibujamos un periodo de la función en el intervalo $[0, \pi]$, siguiendo el esquema



Máximo: (0,3) Máxima (π,3)
Mínimo ($\pi/2$, -3)

Gráfica 7

Con ese esquema se pueden obtener varios ciclos de la gráfica como se ve en la gráfica 15

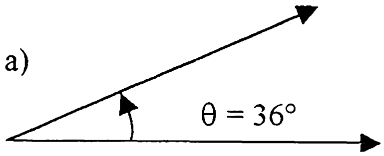
Ejercicos 5.1

1. Aplicando reglas – definiciones – identidades trigonometricas y todos los conocimientos adquiridos en este contenido desarrolle los siguientes ejercicios.

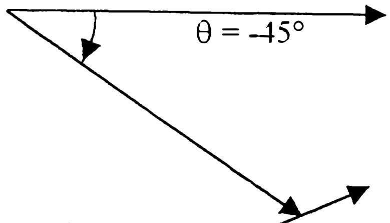
Determinar los ángulos coterminales (uno positivo y otro negativo) para el ángulo dado. Dar la respuesta en grados.

1)

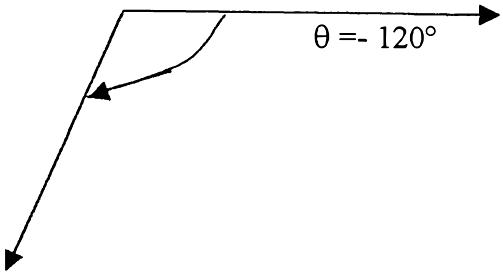
a)



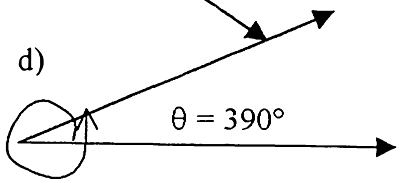
b)



c)

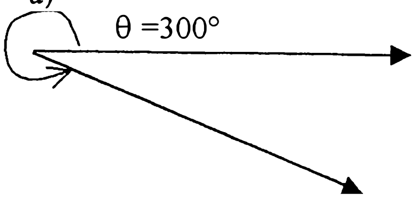


d)

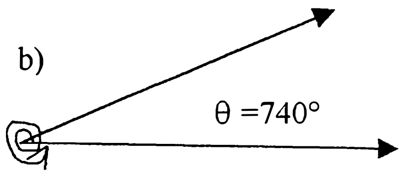


2)

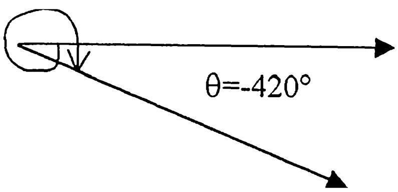
a)



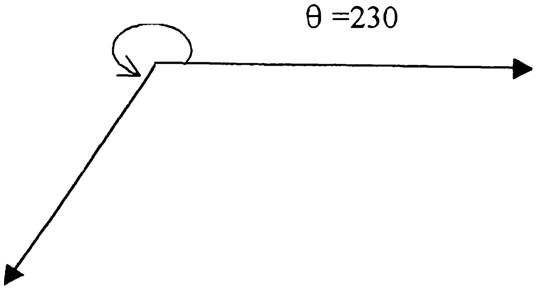
b)



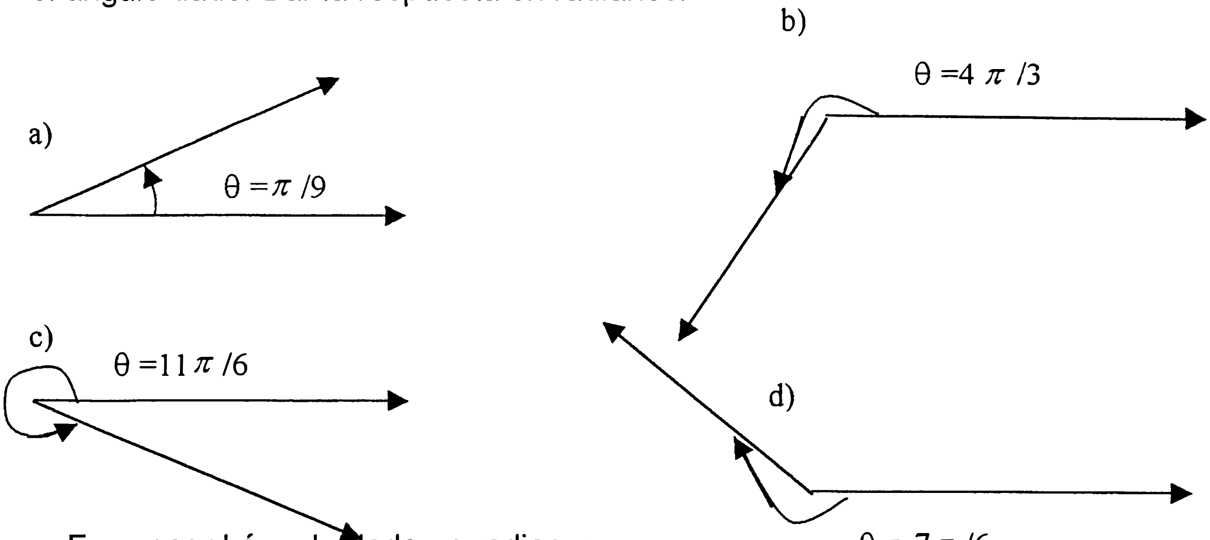
c)



d)



2. Determinar dos ángulos coterminales (uno positivo y otro negativo) para el ángulo dado. Dar la respuesta en radianes.



3. Expresar el ángulo dado en radianes

a) 30º
b) 150º
c) 315º
d) 120º
e) –20º
f) –240º

4. expresar el ángulo dado en grados

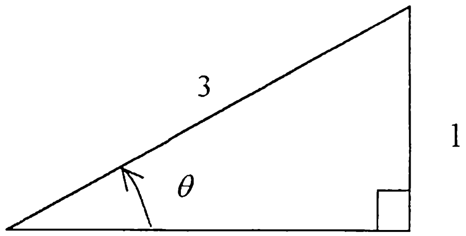
a) $\frac{3\pi}{2}$
b) $\frac{7\pi}{6}$
c) $-\frac{7\pi}{12}$

5. Determinar en que cuadrante está θ

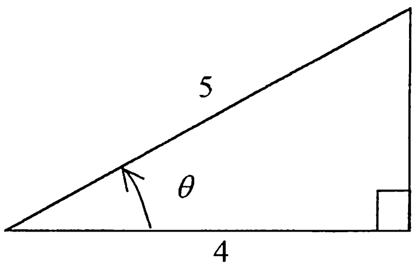
Senθ < 0 y Cosθ < 0

6. Hallar las funciones trigonometricas indicadas del ángulo dado

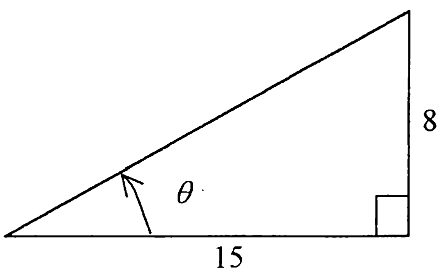
a) Dado senθ $=\frac{1}{2}$, Hallar Cosecθ



b) Dado Cosθ $=\frac{4}{5}$, hallar Ctgθ



c) Dado Ctgθ $=\frac{15}{8}$, hallar Secθ



7. Evaluar el seno, coseno y tangente del ángulo dado

a) 60º

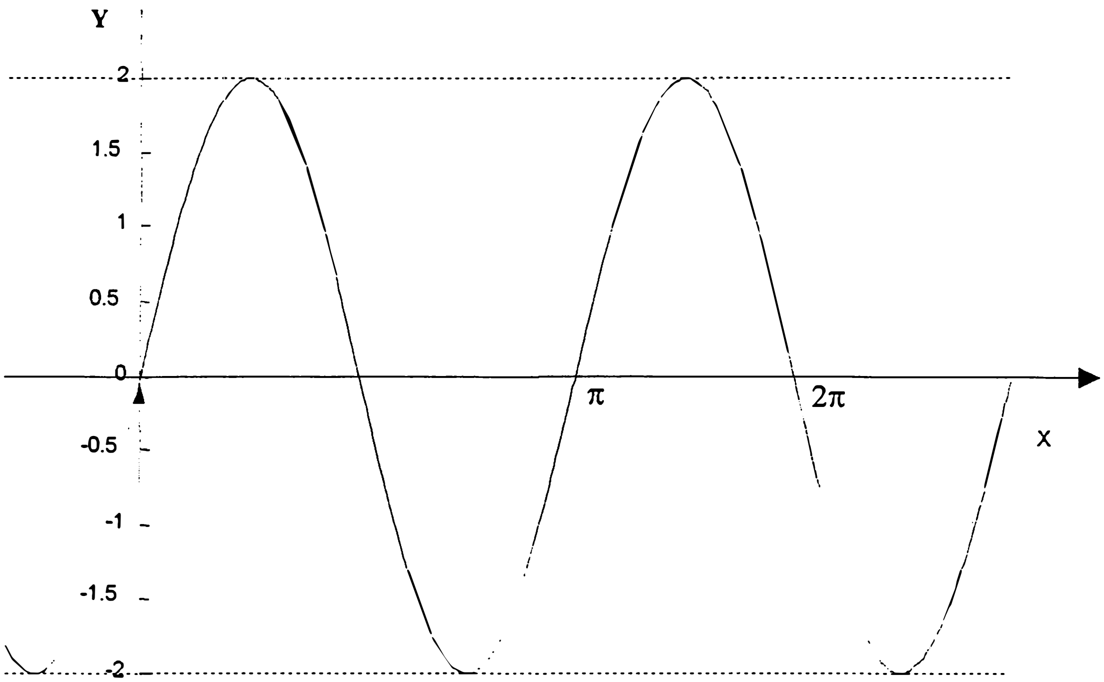
b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{5\pi}{4}$

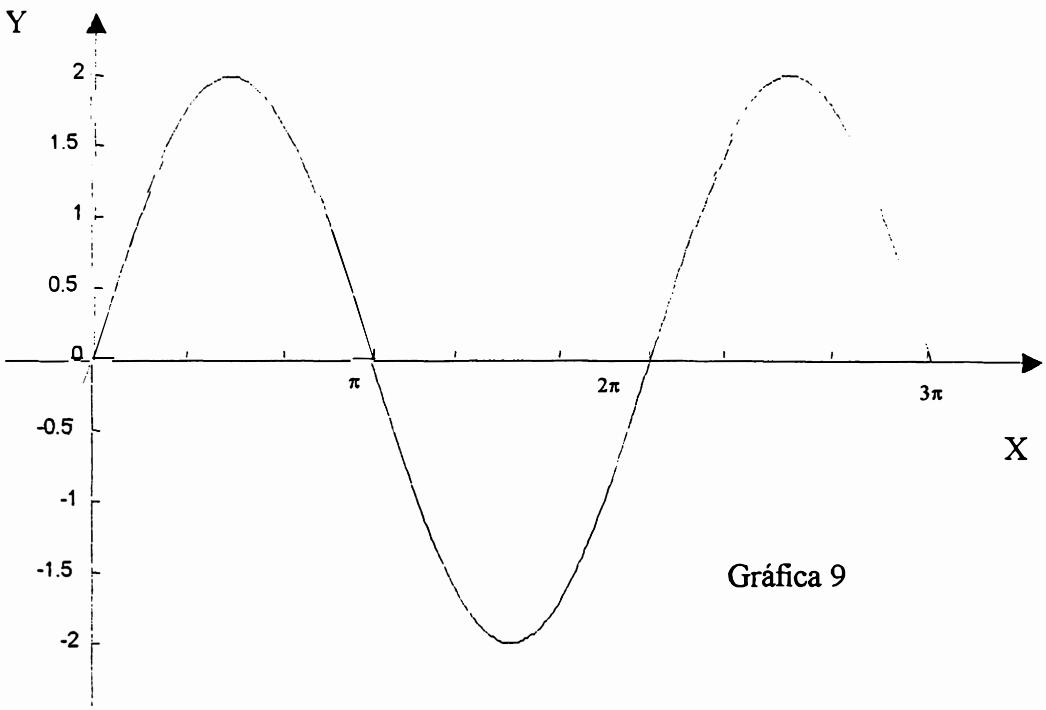
8. Determinar el período y la amplitud de la función dada

$y = 2 \text{ sen } 2x$



Gráfica 8

9. $y = 2 \text{ sen } x$



Gráfica 9

10. Dibujar la gráfica de las funciones que se indican

a) $y = \text{Sen} \frac{x}{2}$

b) $y = -2 \text{ Sen } 6x$

c) $y = \text{Cosec } \frac{x}{2}$

d) $y = 2\text{Sec } 2x$

e) $y = \text{Sen } (x + \pi)$

Bibliografía

UNIDAD I: Lógica Proposicional

- Larrauri – Gondra: Lógica respuestas al cuestionario del programa oficial del quinto curso de ciencias y letras
  Octava edición, textos del Externado de San José. 1968

- UDB Programa de Lógica formal para profesorados y carreras Técnicas de humanidades 2001

UNIDAD II: Conjuntos Relaciones y Funciones

- Gobran Alfonse: Álgebra elemental, Editorial Iberoamérica
  México 1991

UNIDAD III: Funciones Especiales

- Swokowski, Earl W: Álgebra y Trigonometría con Geometría
  Editorial Iberoamérica, México 1988

- Larson - Hostetler: Cálculo y Geometría Analítica, McGraw Hill / Iberoamericana de España. Tercera Edición 1989

- E.D. Phillips, T. Butts, M. Shaughneessy: Álgebra con aplicaciones, Editorial Mexicana 1988