A N E X O S

[1]. ANÁLISIS DE COSTOS EN SISTEMAS DE COLAS.

Una de las decisiones habituales en el uso de este modelo puede serlo el de definir la cantidad de servidores necesarios. Por ejemplo, la cantidad de ascensores en un edificio, la cantidad de escritorios para un equipo de trabajo, etc. La decisión se deberá basar en una relación entre dos costos básicos: el costo de proveer servidores adicionales versus el costo de demorar o no prestar el servicio. Se asume que el costo de demorar el servicio en un Un sistema de colas puede dividirse en sus dos componentes de mayor importancia , la cola y la instalación de servicio .

Ambos componentes del sistema tienen costos asociados que deben de considerarse.

MODELO DE COSTOS

Los modelos de costos, básicamente equilibran los dos tipos siguientes de costos en conflicto:

1.- **Costo de ofrecer servicio**, desde el punto de vista del servidor
2.- **Costo que resulta de la demora en el ofrecimiento del servicio**, desde el punto de vista del cliente

A continuación se desarrollan 2 modelos de costos: Modelo de tasa optima de servicio (c =1) y modelo del número óptimo de servidores en paralelo(c >1)

MODELO DE LA TASA OPTIMA DE SERVICIO (μ)

Considerando un solo servidor con una tasa de llegadas, λ, conocida; se desea determinar la tasa óptima de servicio μ asociada a un modelo de costo apropiado.

Sean CEO (μ) = Costo estimado de operar la instalación / unidad de tiempo, dada μ
CEE (μ) = Costo estimado de espera / unidad de tiempo
Se busca determinar el valor de μ que minimiza la suma de dichos costos. Las fórmula para CEO y CEE como funciones de μ dependen de la situación analizada. Pueden ser o no relaciones lineales, también pueden ser continuas o discretas, dependiendo de la característica de μ

MODELO DEL NUMERO OPTIMO DE SERVIDORES (c)

Ampliando el modelo anterior para determinar el número óptimo de servidores en paralelo, se sigue que el número de servidores " c" que minimiza está dado por:

$$CET (c) = CEO (c) + CEE (c)$$

El valor óptimo de " c " debe satisfacer la siguientes condiciones necesarias:

$CET (c -1) \geq CET (c)$ y $CET (c + 1) \geq CET (c)$

Y siendo :

$$CEO (c) = C1\ c$$
$$CEE (c) = C2\ Ls (c)$$

Donde : c = número de servidores en paralelo
C1 = Costo por **servidor** adicional por unidad de tiempo
C2 = Costo por tiempo unitario de **espera** por cliente
Ls (c) = número esperado de clientes en el sistema, dado c

Aplicando las condiciones necesarias, se obtiene:

$$Ls(c) - Ls(c+1) \le \frac{C1}{C2} \le Ls(c-1) - Ls(c)$$

El valor de C1/C2 indica dónde deberá comenzar la búsqueda para el " c" óptimo

No todos los modelos de líneas de espera se pueden optimizar usando modelos de costos. Se puede usar también modelos de decisión basándose en "niveles de aceptación", tal como se presenta a continuación.

MODELO DEL NIVEL DE ACEPTACION

Si en muchas situaciones será difícil estimar costos, se puede usar el modelo del nivel de aceptación. Este modelo analiza las características de la operación del sistema para decidir sobre los valores óptimos de los parámetros del diseño. El nivel o los limites de aceptación lo define el decisor, en base a su conocimiento y experiencia en el sistema y buscando equilibrar las medidas conflictivas de la instalación.

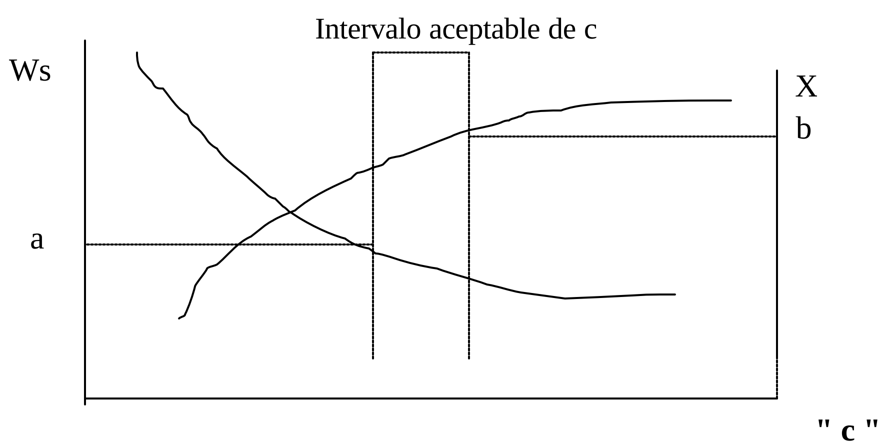
Así en el modelo de servidores múltiples donde se requiere determinar el valor óptimo del número de servidores " c ", se buscará equilibrar las dos medidas conflictivas que son:

a) Tiempo promedio de espera en el sistema : W s
b) Porcentaje X de tiempo inactivo de los servidores

Se pueden establecer los niveles (limites superiores: α , β) de aceptación, expresados matemáticamente como :

$Ws \le \alpha$ y $X \le \beta$

Reemplazando las formulas para hallar Ws y X según sea el caso; se puede resolver gráficamente : Se localiza el valor de "c" dentro del nivel aceptable.



Es así como Frecuentemente, los problemas prácticos de colas tienen que ser resueltas mediante simulación, porque las herramientas matemáticas disponibles, no son adecuadas para tratar la complejidad que encierran los problemas de líneas de espera.

[2]. NOTACIÓN KENDALL

Notación (basado en Kendall, 1953)

Una notación que es en particular adecuada para resumir las características principales de las líneas de espera en paralelo se ha estandarizado como sigue:

a/ b /c : d /e /f

Donde:
a = Distribución de llegadas: Proceso de llegadas
b = Distribución del tiempo de servicio (o de salidas): Proceso de servicio
c = Número de servidores en paralelo (c = 1, 2, 3, ..., ∞)
d = Disciplina de servicio (FCFS, LCFS, SIRO o prioridad = Disciplina General, DG)
e = Número máximo admitido en todo el sistema (en la línea de espera mas en el servicio)
f = Tamaño de la población de clientes (fuente de llamadas finita o infinita)

La distribución de llegadas(a) y del tiempo de servicio (b) se reemplazan por los códigos siguientes: M, D, Ek, GI, o G (cualquiera de los 5 códigos), y significan lo siguiente:

M = Distribución de llegadas o salidas de Poisson (proceso de Markov), o lo que es lo mismo, distribución exponencial entre llegadas o tiempos de servicio
D = Tiempo entre llegadas o de servicio son constantes o deterministas
Ek = Distribución Erlang o Gamma para la distribución del tiempo entre llegadas o tiempo de servicio, con el parámetro K

GI = Distribución de llegadas o del tiempo entre llegadas es general independiente
G = Distribución del tiempo de servicio o salidas es general (no independiente)

Respecto a la disciplina de servicio se considera "DG" para indicar que es una disciplina general en "notación kendall", y que pudiera ser FCFS, LCFS, SIRO o cualquier procedimiento que puedan utilizar los servidores para decidir el orden en que se escogerá a los clientes de la línea de espera para iniciar el servicio .

[3]. ALGUNOS MODELOS DE LINEAS DE ESPERA

Se estudiaran principalmente modelos con procesos de markov; cada modelo se describe con notación extendida de Kendall. Los servidores son en paralelo. Las formulas para cada caso se obtienen a partir las probabilidades de estado estable de tener "n" clientes en el sistema. Estas probabilidades, entonces, se usan para desarrollar las medidas de desempeño del modelo de línea de espera.

Bibliografía : Mathur y Solow (pg. 710 y ss) Taha Hamdy (pg. 655)

CASO 1 : **M / M / 1,** o mas específicamente **M/M/1 : DG/ ¥ / ¥**

Algunas características : Población de clientes infinita, llegadas de clientes probabilística según Poisson; una línea de espera y un solo servidor o canal de atención con tiempo de servicio exponencial.

Supuesto: Condición Estable; cuando $\mu > \lambda$, osea la tasa de servicio promedio es mayor que la tasa de llegadas promedio.

CASO 2 : **M / M / c** o mas específicamente **M/M/c : DG/ ¥ / ¥**

Algunas características : Población de clientes infinita, llegadas de clientes probabilística según Poisson; una línea de espera; “c” servidores idénticos(con tiempo de servicio y tiempo entre llegadas probabilístico y exponencial)

Supuesto: Condición Estable; cuando $c\mu > \lambda$, osea la tasa de servicio promedio es mayor que la tasa de llegadas promedio.

<u>CASO 3</u> : **M / M / c** o mas específicamente **M/M/1 : DG / N / ∞**

La única diferencia entre este modelo y el M/M/1 : DG / ∞ / ∞

[4]. <u>FUNCIONES ANALÍTICAS : DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS</u>

<u>Definición</u>

Se dice que una función f (x) es ***<u>analítica en x_0</u>*** (o desarrollable en serie de potencias en un entorno de x_0) si existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ cuya suma es $f(x)$ en un intervalo abierto centrado en x_0.

<u>Teorema.</u>

Si f (x) es analítica en x_0 , entonces es :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots}$$

[2]

en un cierto intervalo abierto centrado en x_0.

Esta serie se llama <u>serie de Taylor de f (x) en torno a x_0</u>. Cuando $x_0 = 0$, la serie suele denominarse <u>serie de Maclaurin de f (x)</u>

<u>Propiedades:</u>

a) Si existe desarrollo de f(x) en serie de potencias en un entorno de x_0, ***dicho desarrollo es único*** y por tanto coincide con el de Taylor.

b) Condición necesaria y suficiente para la existencia de desarrollo de f(x) en un entorno de x_0, es que f(x) sea indefinidamente derivable en x_0 y que el término complementario de la fórmula finita de Taylor, tienda a cero en el entorno anterior, cuando $n \longrightarrow \infty$.

c) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ con radios de convergencia ρ_1 y ρ_2, entonces:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n \quad , \quad k \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n (x - x_0)^n$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \text{con } c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n$$

siendo ρ_1 el radio de convergencia de $k \cdot f(x)$ y los radios de convergencia de $f(x) + g(x)$ y $f(x) \cdot g(x)$ al menos como el mínimo de ρ_1 y ρ_2.

d) Con las condiciones citadas en c) para f(x) y g(x), también es analítica en x_0 la $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que g(x_0) $\neq 0$. Pero el radio de convergencia del cociente, puede ser menor que el mínimo de ρ_1 y ρ_2.

e) Son funciones analíticas en cualquier x_0, por ejemplo los polinomios, las funciones racionales irreducibles $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siempre que Q(x_0) $\neq 0$, las funciones e^x , sen x, cos x , $e^{x \operatorname{sen} x}$, etc.

f) Obsérvese que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \qquad \text{(índice sumatorio mudo)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \qquad \text{(desplazamiento del índice)}$$

<u>Ejemplo de la Formulación y series de Taylor de funciones elementales</u>

$f_{(x)} = e^x$ esta función puede derivarse infinitamente (derivadas de cualquier orden),Desarrollemos Taylor para a = 0 (a en este caso vale cero = Serie de Mclaurin)

$f_{(0)} = e^0 = 1$, $f'_{(0)} = e^0 = 1$, $f''_{(0)} = e^0 = 1$, ... $f^{n}_{(0)} = e^0 = 1$, $f^{n+1}_{(z)} = e^z$ $(0 < z < x)$

$P_{(x)} = 1 +$ ...+

Calculemos e^x para $x = 1$ hasta $n = 6$ (grado 6º) así tenemos:

Para hallar el error utilizaremos el resto, R_n =

Tengamos en cuenta que $e^0 = 1$ y $e^1 = 2{,}71828$, así que $e^x < 3$ (es el límite, por lo que suplantaremos e^z por 3) así que:

R_n =

Como tenemos 6 términos para hallar el resto utilizaremos el séptimo , $n = 7$ de esa manera:

(el error en menor a 0,001)

[5]. METODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Este método no es mas que la generalización del método de reducción ya conocido para resolver sistemas algebraicos de n ecuaciones lineales con m incógnitas de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma .

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}\,x_2 + \ldots + a'_{2n}\,x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}\,x_2 + \ldots + a'_{mn}\,x_n = b'_n \end{array}\right\}$$

Se trata de utilizando las transformaciones de equivalencia vistas en el punto anterior, lograr que algunos de los coeficientes de las incógnitas sean nulos. El procedimiento para dos ecuaciones es el siguiente:

1) Se elige una incógnita con coeficiente no nulo al que llamaremos **pivote** y que por comodidad supondremos que es el a_{11} (si no es este, siempre podemos alterar el orden de los términos en todas las ecuaciones para situar el pivote en el lugar inicial).

2) A la segunda ecuación le sumamos la primera multiplicada por $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, a la tercera le sumamos la primera multiplicada por $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ y así sucesivamente hasta llegar a la última en la que se sumará la primera multiplicada por $-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$. Con ello es sistema quedará así:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}\,x_2 + \ldots + a'_{2n}\,x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}\,x_2 + \ldots + a'_{mn}\,x_n = b'_n \end{array}\right\}$$

sistema equivalente al primero

3) Si separa la primera ecuación se obtiene otro sistema con una ecuación y una incógnita menos en el que podemos repetir el proceso, hasta que podamos despejar, en alguna ecuación, alguna incógnita.

4) Es más cómodo abreviar la escritura del sistema escribiendo sólo los coeficientes y los términos independientes en forma de matriz numérica recordando qué columna corresponde a cada incógnita (por si ha sido preciso cambiar alguna columna de lugar)

Ejemplo: resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=0 \\ x+t=5 \\ y+z=-3 \end{array}\right\}$$

Tomando como orden inicial de las incógnitas el dado por el orden alfabético de las letras que las representan, podemos escribir la siguiente matriz de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Dejando la primera fila igual y sustituyendo la segunda por el resultado de retarla a la 1ª, y la tercera por el resultado de restarla a la primera, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Tomamos ahora como pivote el 1 de la segunda fila y segunda columna y procedemos dejando iguales la primera y segunda filas y sustituyendo la tercera por el resultado de restarla con la segunda y la 4ª por el resultado de restarla con la 2ª, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora el pivote será el -1 de la posición 3 (fila), 3(columna). Dejamos las tres primeras iguales y sustituimos la 4ª por el resultado de multiplicar la 3ª por 2 y restar la 4ª:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Recordando que la 4ª columna es la de los coeficiente de la incógnita "t" y la 5ª es la de los términos independientes, de la última fila queda:

$$2t = 6 \Rightarrow t = \frac{6}{2} = 3$$

De la tercera fila:

$$-z + t = 5 \Rightarrow -z = 5 - t = 5 - 3 = 2 \Rightarrow z = -2$$

De la 2ª fila:

$$y - z = 1 \Rightarrow y = 1 + z = 1 - 2 = -1$$

De la primera:

$$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y = 1 + 1 = 2$$

La solución es $S = \{2, -1, -2, 3\}$

Veamos por sustitución en el sistema inicial que efectivamente es solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2-1=1 \\ 2-2=0 \\ 2+3=5 \\ -1-2=-3 \end{array}\right\}$$

todas las igualdades son identidades y la solución encontrada es correcta.

El hecho de encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es un procedimiento para resolver problemas cuyo planteamiento algebraico da lugar a dicho sistema, esto es, queremos resolver problemas de la vida diaria mediante sistemas de ecuaciones lineales.

El procedimiento de resolución de problemas consta de tres partes:

- Elección de las incógnitas y planteamiento del sistema.
- Resolución del sistema.
- Comprobación de la solución o soluciones obtenidas.

A Continuación se detalla el método de GAUSS. por eliminación.

[5.1] GAUSS POR ELIMINACIÓN.

Metodo de Gauss

Ecuación Lineal

Una ecuación lineal en *n* variables tiene la forma,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d$$

donde, los números $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, son los coeficientes de la ecuación, y $d \in \mathbb{R}$, es la constante. Una *n-upla* $(s_1, s_2 \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, es una solución de la ecuación, si sustituyendo los números $s_1, \ldots, s_n$, por las variables, se obtiene una relación cierta: es decir, la igualdad $a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = d$, es cierta.

En general, un sistema lineal de *m* ecuaciones en *n* variables, con *coeficientes* a_{ij}, y *constantes* b_i, adquiere la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

y, $(s_1, s_2 \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, es una solución del sistema, si dicha *n-upla* es solución de todas las ecuaciones.

<u>Observación</u>: Siempre supondremos que al menos un coeficiente, en cada columna del sistema, es diferente de cero, ya que en caso contrario, la variable, o incógnita, que aparece en dicha columna no existiría, y es obvio que esto es absurdo.

Método de Gauss

Si en un sistema lineal se realiza alguna de las siguientes transformaciones (llamadas elementales):

- Dos ecuaciones cualesquiera son intercambiadas
- Una ecuación cualquiera del sistema se multiplica (en ambos lados) por una constante diferente de cero.
- Una ecuación cualquiera del sistema es reemplazada por la ecuación que resulta al sumarle a esta misma ecuación, cualquier otra ecuación, la cual además ha sido multiplicada por una constante.

Entonces los dos sistemas son *equivalentes*, es decir, tienen las mismas soluciones. (La demostración es sencilla y se propone como trabajo de estudio para el alumno).

A las tres operaciones elementales. usualmente, se las denomina como: *intercambiar*, *reescalar* (es decir, multiplicar por un escalar), y *pivotar*. La transformación que *intercambia* entre sí, las filas *i-ésima* y *j-ésima*, se denota mediante $\boxed{H_{ij}}$, (se puede interpretar, también como que lo que se intercambian son los subíndices de las filas *i* y *j*, pasando ambas por tanto a ocupar una situación de fila diferente en el sistema); La transformación que *re-escala* la ecuación *i-ésima* multiplicándola por la constante *k*, se denota mediante $\boxed{H_i(k)}$; y, por fin, la transformación $\boxed{H_{ij}(k)}$, que *pivota* la ecuación *j-ésima* sobre la *i-ésima*, haciendo que a la fila *i* se le sume la fila *j* (en la cual, previamente, todos sus coeficientes han sido multiplicadas por la constante *k*).

Variable Inicial

En cada una de las filas del sistema lineal, la primera variable que aparece con un coeficiente distinto de cero, se denomina, *variable inicial* de la fila. Se dice que un sistema está en *forma escalonada* si la *variable inicial* en cada fila (obviamente, excepto en la primera), se encuentra a la derecha de la *variable inicial* de la fila que le precede.

<u>PROCEDIMIENTO PARA, MEDIANTE TRANSFORMACIONES ELEMENTALES, ENCONTRAR UN SISTEMA EQUIVALENTE EN FORMA ESCALONADA:</u>

Lo que pretende el algoritmo es hallar un sistema equivalente al dado inicialmente, pero con la forma escalonada. Una matriz está en forma escalonada si el coeficiente de la variable inicial en una fila cualquiera del sistema, siempre se encuentra en una columna situada más a la derecha que la de la variable inicial de la fila anterior a ésta.

Para conseguir este objetivo se hace uso de las transformaciones elementales (*reemplazar*, *reescalar* y *pivotar*), y la forma de conseguirlo es la siguiente: Partiendo de la primera fila y la primera columna, es decir en el lugar *(1,1)*, vamos a mirar hacia abajo de la columna todos los coeficientes a_{11}, a_{21}, .. a_{m1}, hasta encontrar, si esto es posible, el primer coeficiente que sea diferente de cero. Está claro que éste coeficiente podría ser el propio a_{11}, pero también podría ser otro coeficiente cualquiera. Supongamos, por ejemplo, que el algoritmo ha tenido que ir "columna abajo" hasta llegar al primer coeficiente diferente de cero a_{i1} en la fila *i-ésima*. Una vez encontrado este primer coeficiente a_{i1}, se intercambian entre sí, mediante *reemplazar* $\boxed{H_{1i}}$, la filas *primera* e *i-ésima*, así el coeficiente a_{i1}, pasa ahora a ocupar el lugar a_{11}.

A continuación, mediante *re-escalar* y *pivotar* se hace que todos los coeficientes que estén bajo este (nuevo) a_{11}, sean cero. Así, si en la ecuación que ocupa la fila *r-ésima*, su primer coeficiente a_{r1}, es diferente de cero, para hacer que pase a valer cero, *se pivota* sobre el propio a_{11}, aplicando $H_{r1}(k)$: esto significa que la ecuación en la fila *r-ésima*, se va a sustituir por la ecuación obtenida como resultado de sumar la propia ecuación *r-ésima*, con la ecuación situada en la *primera fila* (en la cual está el elemento pivote a_{11}), la cual previamente ha sido multiplicada por un cierto coeficiente *K*. Es obvio Ahora, que si se hace:

$$K = \left(- \frac{a_{r1}}{a_{1r}} \right)$$

entonces, al aplicar la transformación $H_{r1}(k)$, el coeficiente a_{r1}, pasa a tomar el valor resultado de sumar a_{r1} con el coeficiente a_{11} multiplicado por $K = \left(- \frac{a_{r1}}{a_{1r}} \right)$, esto algorítmicamente se escribe como que, se ha hecho la asignación:

$$a_{r1} \leftarrow a_{r1} + \left(- \frac{a_{r1}}{a_{1r}} \right) \cdot a_{1r}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a_{r1} \leftarrow 0$$

Lo cual es equivalente a decir que el nuevo valor del coeficiente en la fila *r* columna *1*, ahora pasa a ser *cero*. A continuación se pasa un escalón, es decir un paso horizontal y su correspondiente vertical, es decir se va al lugar (*2,2*), y se hace lo mismo que anteriormente, pero empezando desde el lugar (*2,2*)

En el caso de no haber encontrado coeficiente alguno, distinto de cero, en toda la primera columna, nos desplazaríamos hacia la derecha pero sólo en horizontal, o lo que es lo mismo, nos iríamos a la posición (*1*,2), y procederíamos exactamente igual que hicimos antes, pero ahora pivotando en (*1,2*), se hace una búsqueda hacia abajo hasta encontrar un coeficiente diferente de cero, caso de encontrarlo, pasar éste al lugar (*1,2*), y a continuación proceder a hacer cero todos los que están bajo él.

Si se utilizase como pivote la posición (*i,j*), habría que hacer lo mismo que lo expuesto, pero yendo hacia abajo desde esta posición a buscar un elemento diferente de cero que pueda servir como pivote; si la búsqueda encuentra dicho elemento, se traslada al lugar (*i,j*), y a continuación, mediante re-escalar y pivotar se hacen cero todos los coeficientes de la columna *j-ésima* que están bajo la fila *i*-ésima. A continuación se pasa a la posición (*i+1, j+1*). Si la búsqueda es infructuosa, se pasa a la posición (*i, j+1*). Definiendo las rutinas:

- " Buscar-variable-inicial-columna-abajo (i,j) "

  Estando en la posición (*i, j*), se busca columna abajo el primer coeficiente diferente de cero en la columna. En caso de que dicho coeficiente sea encontrado, se da el valor SI a la variable: VARIABLE-INICIAL-ENCONTRADA, en caso contrario se le da el valor NO

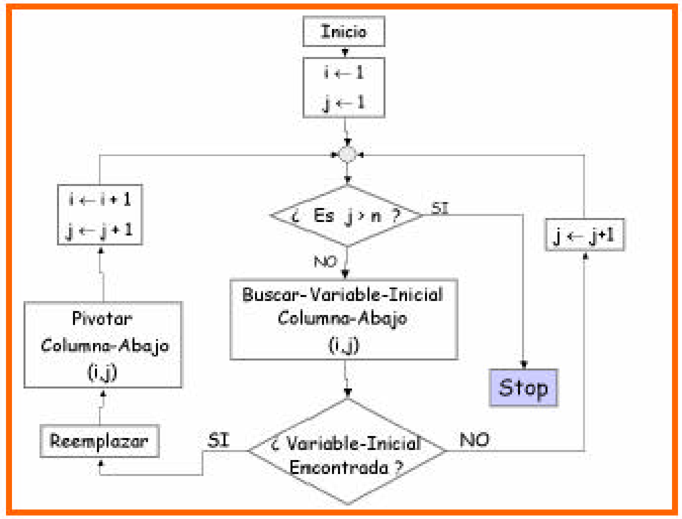
- " Reemplazar "

  Se intercambian entre sí las fila *i-ésima* con la fila donde anteriormente se encontró el primer coeficiente diferente de cero.

- " Pivotar Columna-Abajo "

  Mediante pivotar, se hace que todos los coeficientes de la columna *j-ésima* a partir de la fila *(i+1)-ésima* en adelante sean cero.

En pseudocódigo, el algoritmo quedaría entonces:



En el análisis de las posibles formas que tiene de finalizar este procedimiento, está una de las ideas más importantes, y que más se van a utilizar a lo largo de toda la asignatura. La idea de rango *r* (número de ecuaciones que realmente intervienen en el sistema), y el significado que tiene el número *n - r* (número de variables que son utilizadas como parámetros o variables libres), es clave en el desarrollo de la asignatura.

Como bajar un escalón supone avanzar una posición en horizontal y otra en vertical, y es obvio que en horizontal hacia la derecha nada más que se puede avanzar como máximo las *n* posiciones en columna correspondientes a las *n* variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, del sistema; el máximo número de filas, del sistema resultante en forma escalonada, con coeficientes diferente de cero será *n*. Pudiera ser, sin embargo, que en el procedimiento, alguna o algunas veces, hubiese sido necesario avanzar una columna sin bajar peldaño (caso en que en "Buscar-variable-inicial-columna-abajo" no se hubiese encontrado variable inicial alguna en la columna); es decir, se podría haber avanzado una o más columna sin bajar peldaño; lo que supondría que al terminar de procesar todas las columnas, el sistema resultante en forma escalonada obtenido, tendría un número r, menor que n, de filas con coeficientes no nulos; el resto, caso de existir, serían todos cero. En este caso, cuando en el sistema resultante en forma escalonada aparecen al final filas con coeficientes todos igual a cero, entonces si las constantes b_i correspondientes a estas filas son también cero, las filas se pueden eliminar del sistema (ya que en realidad lo que se tiene son identidades del tipo $0 = 0$). En cambio, si la constante b_i, correspondiente a alguna de estas filas con todos los coeficientes cero, fuese diferente de cero, aparecería una inconsistencia del tipo $0 = b_i$ (siendo $b_i \neq 0$), y esto hace que todo el sistema sea incompatible o inconsistente, y que no tenga solución.

Una vez finalizado el procedimiento de Gauss, podrán suceder dos cosas:

1. Que aparezca una fila "i" con todos los coeficientes iguales a cero y con la constante b_i diferente de cero. <u>En este caso el sistema es incompatible.</u>

2. Que no aparezca fila alguna con ceros (en el sistema inicial es $m \leq n$); o que todas las filas con coeficientes iguales a cero, tengan también constantes iguales a cero (en este caso todas estas filas son suprimidas). En este caso <u>el sistema es compatible</u>, pudiendo ser

    a. <u>Compatible Determinado</u> (la solución es única): si el número r de filas en el sistema escalonado es igual a n.
    b. <u>Compatible Indeterminado</u> (infinitas soluciones): si el número r de filas en el sistema escalonado es igual menor que n.

Caso: $r = n$

El sistema resultante en forma escalonada, después de utilizar el método de Gauss, será de la forma:

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + \dots + a_{1(n-1)}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\
0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + \dots + a_{2(n-1)}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\
0 + 0 + a_{33}x_3 + \dots + \dots + a_{3(n-1)}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3 \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1} \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + 0 + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}$$

En este caso se dice que <u>el sistema es compatible determinado</u>, (pues la solución al ser única está totalmente determinada). Para hallar la solución se utiliza un método que llamaremos de SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS, que consiste en lo siguiente:

1. Se despeja x_n, de la última ecuación, esto es

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

2. Se sustituye éste valor en la ecuación de atrás, hallando a continuación el valor de x_{n-1}

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot \frac{b_n}{a_{nn}}\right)$$

3. Se sigue el procedimiento de sustitución hacia atrás, hasta que el valor de todas las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, es obtenido.

Caso: $r < n$

Visualicemos en el siguiente diagrama, como quedaría el sistema al final del procedimiento

$$r < n \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots = b_1 \\
0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots = b_2 \\
0 + 0 + \dots + \dots = \\
0 + 0 + \dots + \dots = \\
0 + 0 + \dots + \dots + a_{rr}x_r + a_{r(n-1)}x_{n-1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r
\end{cases}$$

El sistema en el caso $n = r$, fue fácil de resolver por el método de sustitución hacia atrás, debido a que se disponía de tantas variables como filas. El caso $r < n$, se puede reducir también a un sistema con tantas variables como filas. Para ello lo que se hace es pasar todas las variables no iniciales (en total $n - r$), a la parte izquierda de las ecuaciones, y tratarlas como si fuesen una especie de constantes literales o parámetros. El sistema entonces quedaría con r variables y r filas, y también en forma escalonada; por el método de sustitución hacia atrás, se podría entonces resolver el sistema; únicamente que las soluciones quedarán dependientes de los valores de los parámetros: al dar diferentes valores a éstos, la solución obtenida será diferente. Es por ello que en este caso, el sistema se dice que es compatible (es decir tiene solución) pero indeterminado (hay infinitas soluciones, y para determinarlas, hay que dar valores a los parámetros.

[6]. FORMULARIOS UTILIZAOS PARA EL ESTUDIO DE CAMPO .

FORMULARIO PARA LA RECOLECCION DEL TIEMPOS EN COLA

EMPRESA:	Banco de Comercio Agencia España	FECHA:	/ /2003
OBSERVADOR:		HORA INICIO:	
		Pagina # :	

#	Tiempo llegada			Tiempo Salida			Caja	Llega cola	Deserción	#	Tiempo llegada			Tiempo Salida			Caja	Llega cola	Deserción
#	H	M	S	H	M	S	#			#	H	M	S	H	M	S	#		
1										51									
2										52									
3										53									
4										54									
5										55									
6										56									
7										57									
8										58									
9										59									
10										60									
11										61									
12										62									
13										63									
14										64									
15										65									
16										66									
17										67									
18										68									
19										69									
20										70									
21										71									
22										72									
23										73									
24										74									
25										75									
26										76									
27										77									
28										78									
29										79									
30										80									
31										81									
32										82									
33										83									
34										84									
35										85									
36										86									
37										87									
38										88									
39										89									
40										90									
41										91									
42										92									
43										93									
44										94									
45										95									
46										96									
47										97									
48										98									
49										99									
50										100									
PROM										PROM									
TOTAL										TOTAL									
OBS.										OBS.									

FORMULARIO PARA LA RECOLECCION DEL TIEMPO DE SERVICIO POR TRANSACCION

EMPRESA:	Banco de Comercio Agencia España	FECHA:	/ /2003
OBSERVADOR:		HORA INICIO	
Caja #		Pagina #:	

TIPO DE TRANSACCIONES

1	Retiro Cuenta Ahorro	8	Apertura de Cuentas
2	Deposito Cuenta Ahorro	9	Abono a Prestamos
3	Cheque Cuenta Corriente	10	Abono a Tarjeta de Crédito
4	Deposito Cuenta Corriente (Remesa)	11	Devolución de Renta
5	Pago de Colectores	12	Cambio de Moneda
6	Pago de Colegiaturas	13	Pago de subsidio (ISSS)
7	Pago de Remesas Familiares	14	Actualización de Libreta de ahorro

#	TIEMPO INICIAL			TIEMPO FINAL			TRANSACCIONES					
	H	M	S	H	M	S	A	B	C	D	E	OBSERVACIONES
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												
32												
33												
34												
35												
36												
37												
38												
39												
40												
PROM												
TOTAL												
OBS												

Investigación de Campo

Investigación de Campo

GENERALIDADES DE LA INVESTIGACIÓN DE CAMPO

Como parte del análisis de la investigación de campo realizada en la Sucursal España del Banco de Comercio, del 30 de Junio al 5 de Julio, para el análisis del sistema "Una Cola con Múltiples Servidores", se ha hecho la siguiente interpretación.

CANTIDAD DE PERSONAS QUE ENTRAN Y SALEN DE LA CALA:

Al analizar la investigación de campo recolectada en dicha sucursal, se ha determinado la cantidad de personas que llegan a formar parte de la línea de espera (cola).
A continuación se presenta una tabla en la cual se resumen estos éstas cantidades:

Para el día 30 de Junio:

HORA	Personas que entran a la cola	Personas que salen de la cola	Deserciones
08:37 am - 09:00 am	47	36	0
09:00 am - 10:00 am	100	89	1
10:00 am - 11:00 am	81	65	3
11:00 am - 12:00 am	63	75	4
12:00 pm - 01:00 pm	89	76	2
01:00 pm - 02:00 pm	81	93	4
02:00 pm - 03:00 pm	80	39	3
03:00 pm - 04:00 pm	61	48	13
04:00 pm - 05:00 pm	55	67	6
05:00 pm - 05:21 pm	3	36	0
TOTAL :	**660**	**624**	**36**

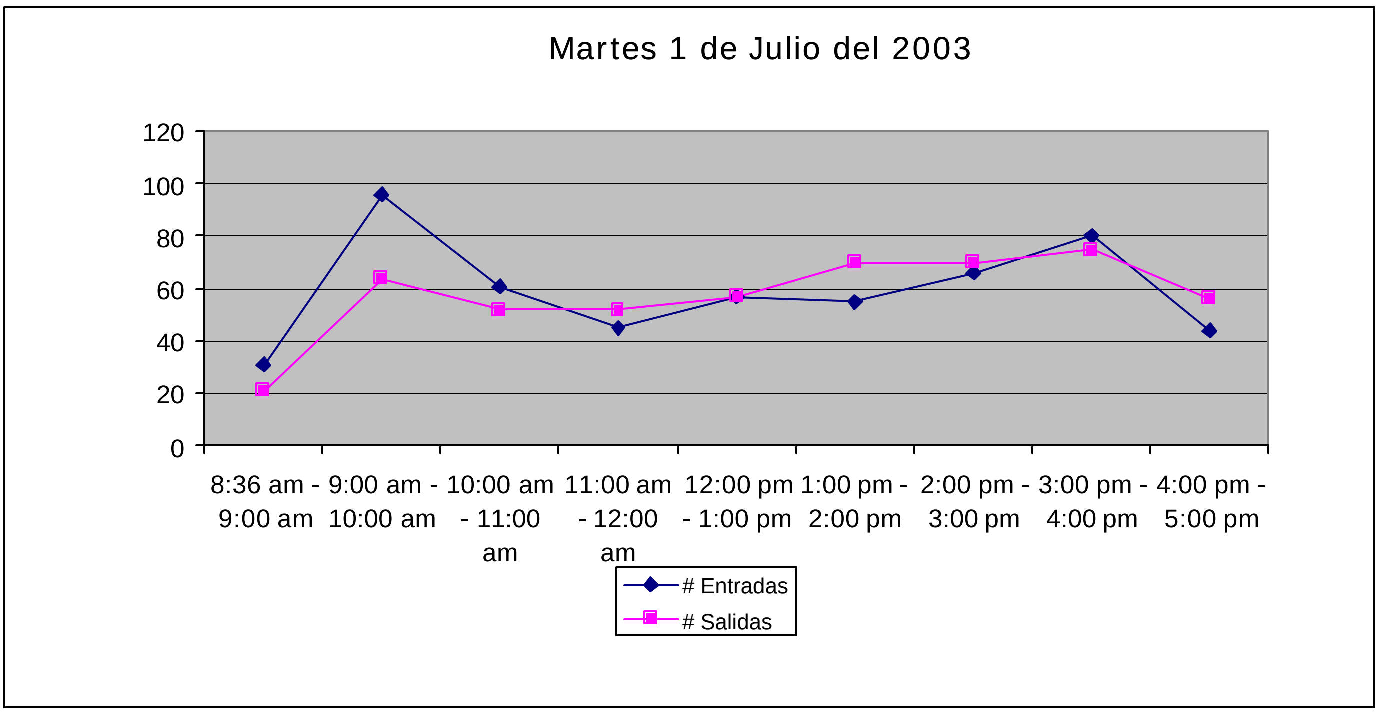
En la tabla anterior se presentan la cantidad de personas en intervalos de una hora en las cuales forman parte de la cola, así como también se presenta la cantidad de personas que salen de la cola para recibir atención, al igual que personas que desertan de la cola.
Se presenta a continuación también en forma gráfica dichos resultados:

Al analizar la gráfica anterior se observa como se da el movimiento de personas dentro del sistema de Una cola con Múltiples servidores, pudiendo comprobar que el sistema es bastante estable en cuanto que la cantidad de personas que pasan a forma la cola son la misma cantidad de personas que salen al igual que puede entonces justificar la cantidad de personas que abandonaron la cola (desertaron) en el intervalo de las 3:00 pm a

4:00 pm, ya que como se observa entraban más personas de las que podían ser atendidas, ocasionando que la cola creciera mucho y las personas decidieran desertar de ella.

Para el día 1 de Julio:

HORA	Personas que entran a la cola	Personas que salen de la cola	Deserciones
8:36 am - 9:00 am	31	21	0
9:00 am - 10:00 am	96	64	4
10:00 am - 11:00 am	61	52	2
11:00 am - 12:00 am	45	52	6
12:00 pm - 1:00 pm	57	57	2
1:00 pm - 2:00 pm	55	70	2
2:00 pm - 3:00 pm	66	70	1
3:00 pm - 4:00 pm	80	75	1
4:00 pm - 5:00 pm	44	56	0
TOTAL:	535	517	18

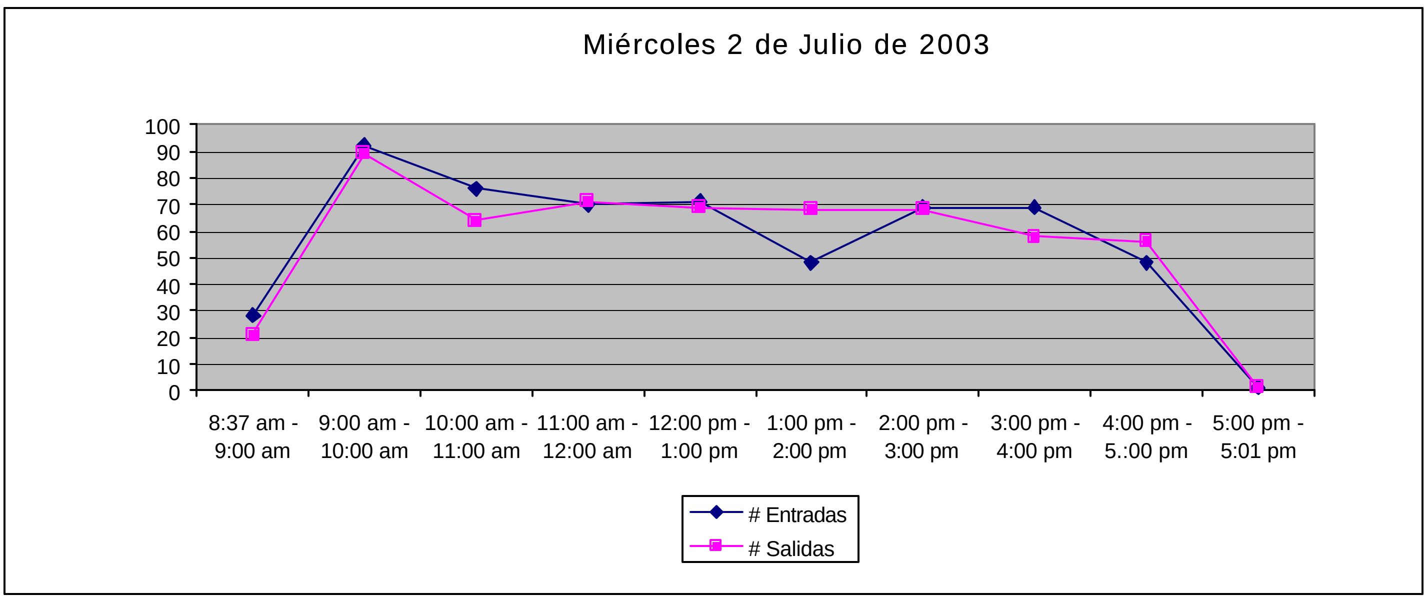


Para el día 2 de Julio de 2003:

HORA	Personas que entran a la cola	Personas que salen de la cola	Deserciones
08:37 am - 09:00 am	28	21	0
09:00 am - 10:00 am	92	89	1
10:00 am - 11:00 am	76	64	2
11:00 am - 12:00 am	70	71	1
12:00 pm - 01:00 pm	71	69	0
01:00 pm - 02:00 pm	48	68	0
02:00 pm - 03:00 pm	69	68	0
03:00 pm - 04:00 pm	69	58	1
04:00 pm - 05:00 pm	48	56	2
05:00 pm - 05:01 pm	1	1	0
TOTAL :	**572**	**565**	**7**

El la tabla anterior se puede observar que las cantidades de personas atendidas (salen de la cola), son muy cercanas a las cantidades de personas que entran a la cola, ocasionando con esto que se vea reducida la cantidad de personas que deserten.

A continuación se presenta la información en forma gráfica:



Al analizar el gráfico anterior se puede visualizar fácilmente las horas del día en las que el sistema se comporto de manera peculiar por ejemplo en el intervalo de las 9:00am a las 11:00am se visualiza que la cantidad de personas que pasaba a formar parte de la cola era mayor que la cantidad de personas que salían de la cola registrando entonces unas de las pocas deserciones del día.

En el intervalo de la 1:00p m a las 3:00pm se logra observar que el no existieron personas en cola ya que la cantidad de personas atendidas, es decir que salen de la cola son mayores que la cantidad de personas que permanecieron en cola antes de ser atendidos.

Luego en el intervalo de 3:00pm a 4:00pm se observa que existe otra ves gran afluencia de clientes por lo que se dan las otras deserciones de la cola.

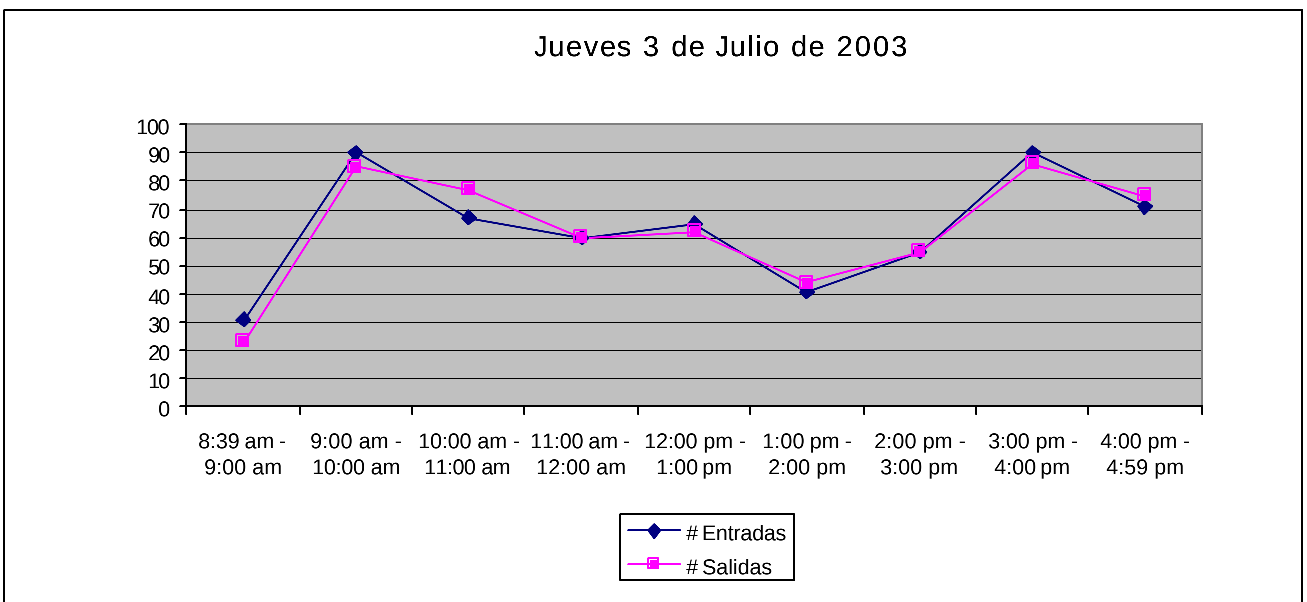
Para el día 3 de Julio de 2003:

HORA	Personas que entran a la cola	Personas que salen de la cola	Deserciones
08:39 am - 09:00 am	31	23	0
09:00 am - 10:00 am	90	85	2
10:00 am - 11:00 am	67	77	0
11:00 am - 12:00 am	60	60	0
12:00 pm - 01:00 pm	65	62	0
01:00 pm - 02:00 pm	41	44	0
02:00 pm - 03:00 pm	55	55	0
03:00 pm - 04:00 pm	90	86	1
04:00 pm - 04:59 pm	71	75	0
TOTAL :	**570**	**567**	**3**

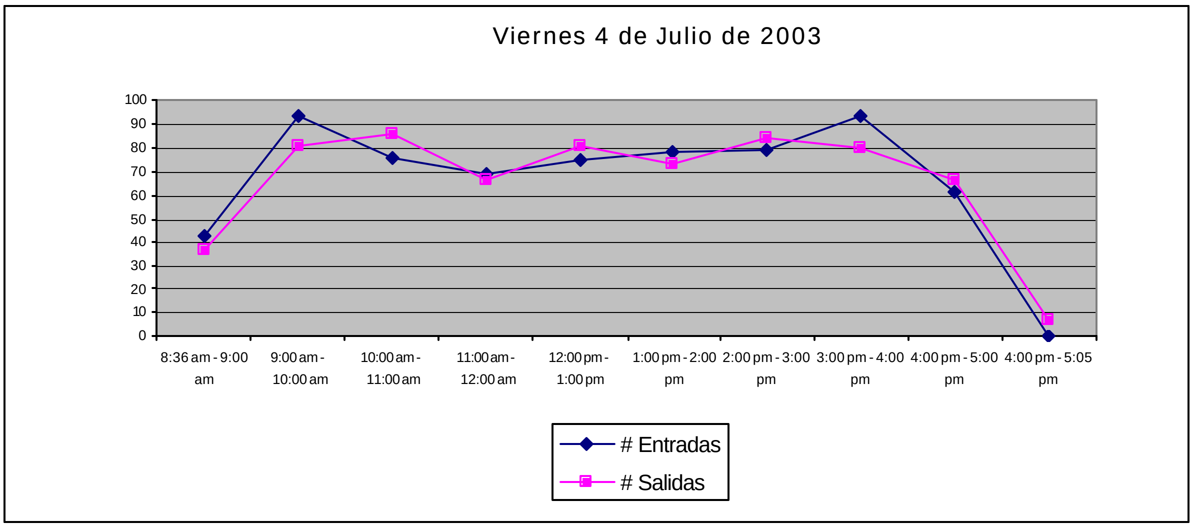
En la tabla anterior se puede observar que este día en particular la cantidad de personas que entran a formar parte de la cola son la misma cantidad que las personas que salen de la cola, existiendo una gran proporcionalidad en cuanto a ellas durante todo el día, es por esto que no se registran tantas deserciones.

En el gráfico anterior se puede demostrar lo antes expuesto con respecto a la gran similitud entre entradas y salidas de la cola en este día.

Para el día 4 de Julio de 2003:



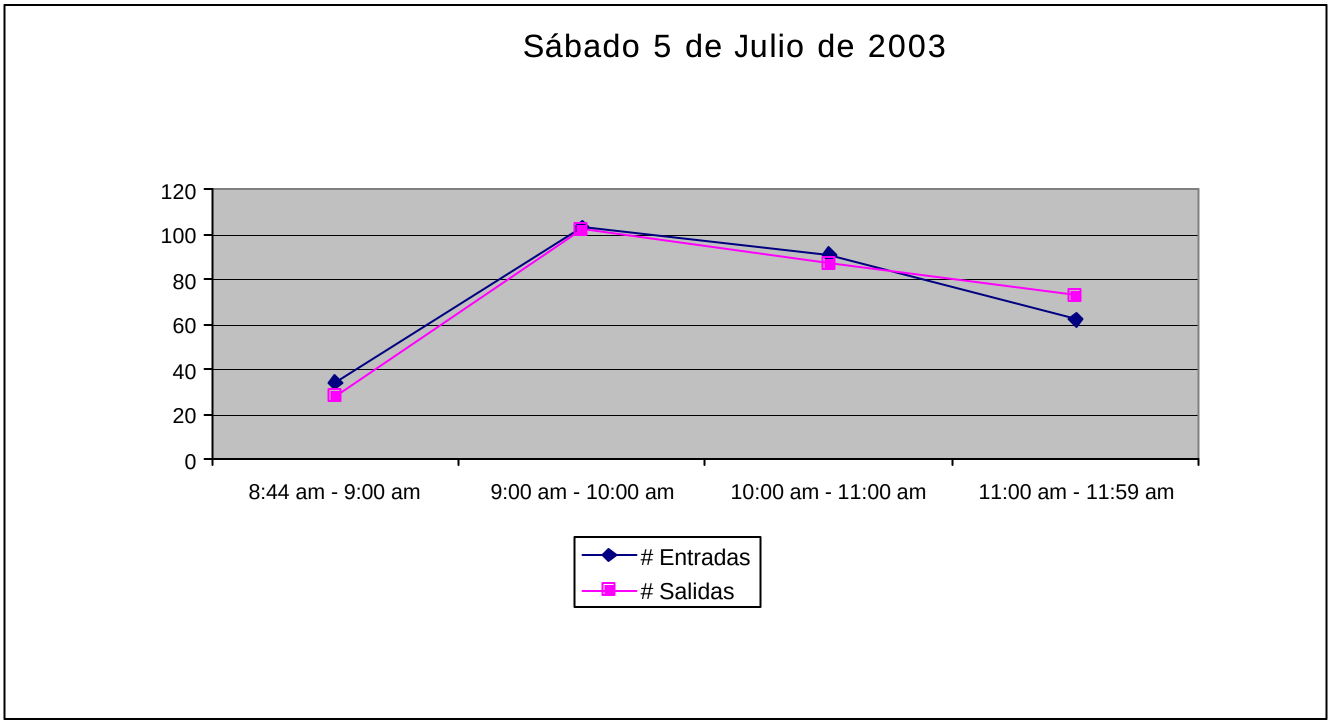
HORA	Personas que entran a la cola	Personas que salen de la cola	Deserciones
08:36 am - 09:00 am	43	37	1
09:00 am - 10:00 am	93	81	0
10:00 am - 11:00 am	76	86	2
11:00 am - 12:00 am	69	66	0
12:00 pm - 01:00 pm	75	81	1
01:00 pm - 02:00 pm	78	73	0
02:00 pm - 03:00 pm	79	84	0
03:00 pm - 04:00 pm	93	80	2
04:00 pm - 05:00 pm	61	66	0
05:00 pm - 05:05 pm	0	7	0
TOTAL :	**667**	**661**	**6**



Al igual que los días anteriores basta con observar la representación gráfica de la información para poder explicarse la tabla.

Para el día 5 de Julio de 2003:

HORA	Personas que entran a la cola	Personas que salen de la cola	Deserciones
08:44 am - 09:00 am	34	28	0
09:00 am - 10:00 am	103	102	0
10:00 am - 11:00 am	91	87	0
11:00 am - 11:59 am	62	73	0
TOTAL :	**290**	**290**	**0**



Al analizar los datos que se presentan en la tabla y gráfica anterior podemos observar que pudo ser suplida con mucha capacidad la afluencia de clientes ya que no se registró ninguna deserción.

DESERCIONES:

Se pudo observar que las personas que llegan al Banco para realizar sus transacciones, lo hacen formando parte del sistema de una cola múltiples servidores, en un primer momento. Y pasado un tiempo algunas de éstas optan por retirarse de la cola (Desertar), habiéndose notado las siguientes opciones:

- Deserción total de la entidad bancaria sin realizar sus transacciones.
- Deserción de la línea de espera común, hacia la cola de la caja de una sola transacción.
- Desertar de la línea de espera común, para realizar la transacción en el cajero automático dentro del banco.
- Personas que son retiradas de la línea de espera común, cuando se hace corte diario para pagos de colegiaturas, pagos de servicios y pagos de subsidios por parte del Seguro Social.
- Deserción de personas que se dirigen hacia atención al cliente y luego se retiran.

En base a los tipos de deserciones antes expuestas se presenta a continuación un análisis detallado para cada uno de los días comprendidos en el periodo del 30 de Junio al 5 de Julio :

Día 30 de Junio de 2003:

Tipo de Deserción	Cantidad
Deserción Total	5
Deserción a Caja de una Transacción	24
Deserción al Cajero Automático	3
Deserción a Atención al Cliente	0
Deserción por corte de transacción	4
Total de Deserciones del día:	**36**

Día 2 de Julio de 2003:

Tipo de Deserción	Cantidad
Deserción Total	5
Deserción a Caja de una Transacción	9
Deserción al Cajero Automático	1
Deserción a Atención al Cliente	1
Deserción por corte de transacción	0
Total de Deserciones del día:	**16**

Día 3 de Julio de 2003:

Tipo de Deserción	Cantidad
Deserción Total	0
Deserción a Caja de una Transacción	7
Deserción al Cajero Automático	0
Deserción a Atención al Cliente	0
Deserción por corte de transacción	0
Total de Deserciones del día:	**7**

Día 4 de Julio de 2003:

Tipo de Deserción	Cantidad
Deserción Total	0
Deserción a Caja de una Transacción	3
Deserción al Cajero Automático	0
Deserción a Atención al Cliente	0
Deserción por corte de transacción	0
Total de Deserciones del día:	**3**

Día 5 de Julio de 2003:

Tipo de Deserción	Cantidad
Deserción Total	1
Deserción a Caja de una Transacción	3
Deserción al Cajero Automático	1
Deserción a Atención al Cliente	1
Deserción por corte de transacción	0
Total de Deserciones del día:	**6**

TIEMPOS PROMEDIOS EN SEGUNDOS DE ENTRADAS Y SALIDAS DE LA COLA:

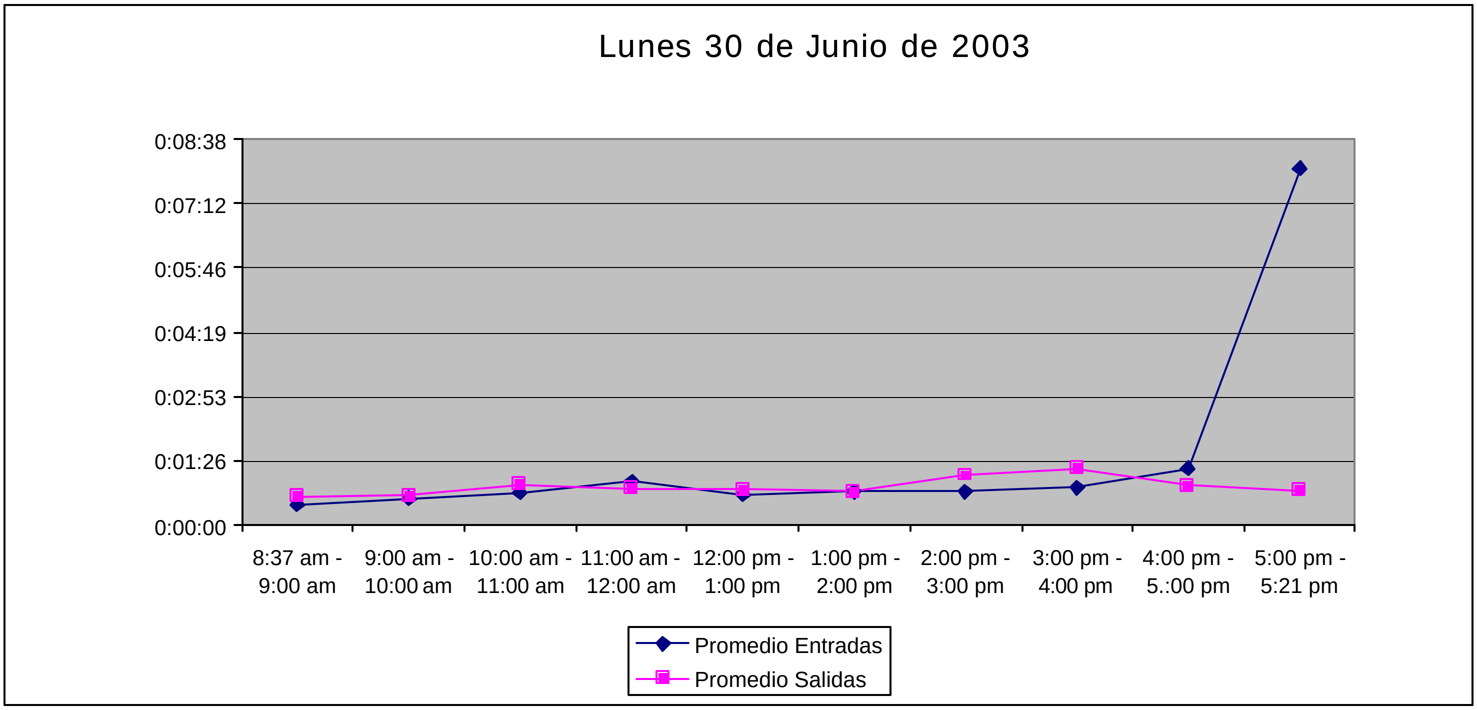
Para tener una mejor perspectiva de cada cuanto tiempo una persona pasa a formar parte de la cola y de cada cuanto tiempo sale alguien de la cola para recibir servicio, se presenta a continuación un análisis en valores de tiempo promedios de entradas y salidas en los intervalos de cada hora.

Lunes 30 de Junio de 2003:

HORA	Promedio Entradas	Promedio Salidas
08:37 am - 09:00 am	0:00:28	0:00:38
09:00 am - 10:00 am	0:00:36	0:00:40
10:00 am - 11:00 am	0:00:44	0:00:55
11:00 am - 12:00 am	0:00:58	0:00:48
12:00 pm - 01:00 pm	0:00:41	0:00:47
01:00 pm - 02:00 pm	0:00:45	0:00:45
02:00 pm - 03:00 pm	0:00:45	0:01:07
03:00 pm - 04:00 pm	0:00:50	0:01:16
04:00 pm - 05:00 pm	0:01:16	0:00:54
05:00 pm - 05:21 pm	0:07:59	0:00:46

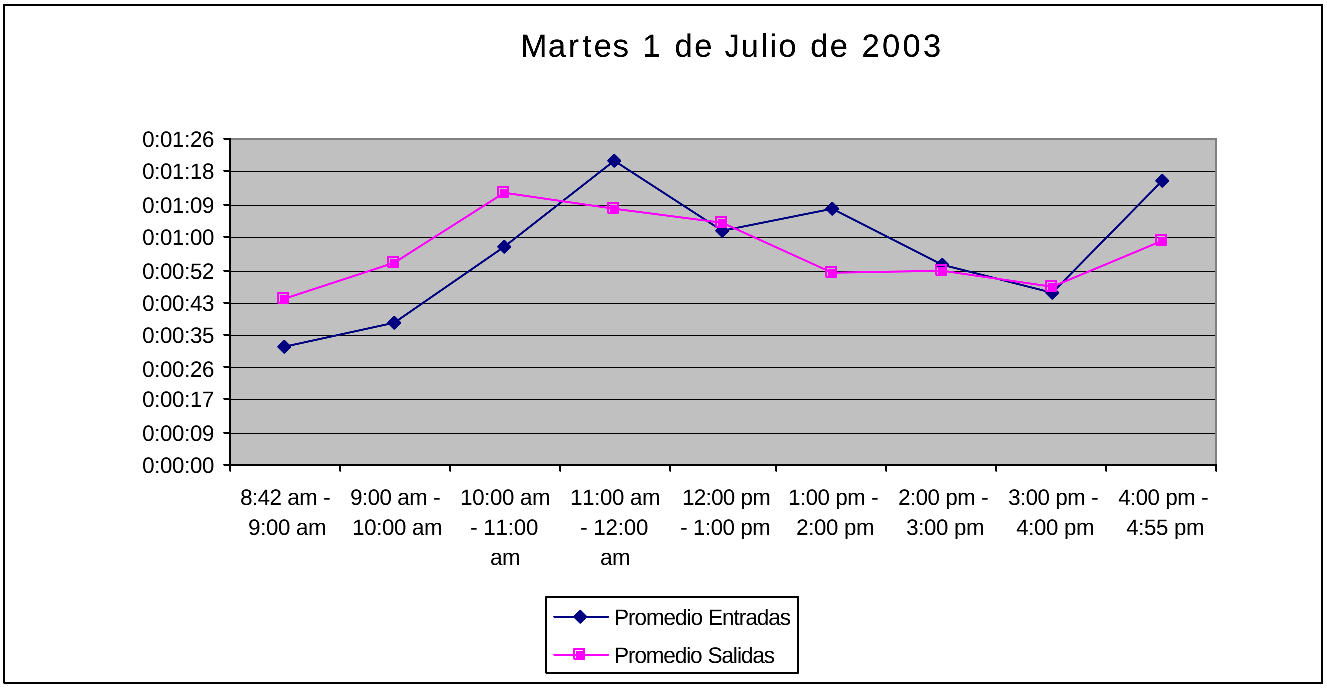
Tomando por ejemplo el intervalo de 09:00am a 10:00am, de la tabla anterior, se tiene que cada 28 seg. En promedio, una persona inicia su proceso en la línea de espera para realizar sus transacciones, y que cada 38 seg. Alguien abandona la cola para recibir servicio.

Y gráficamente se representa así:



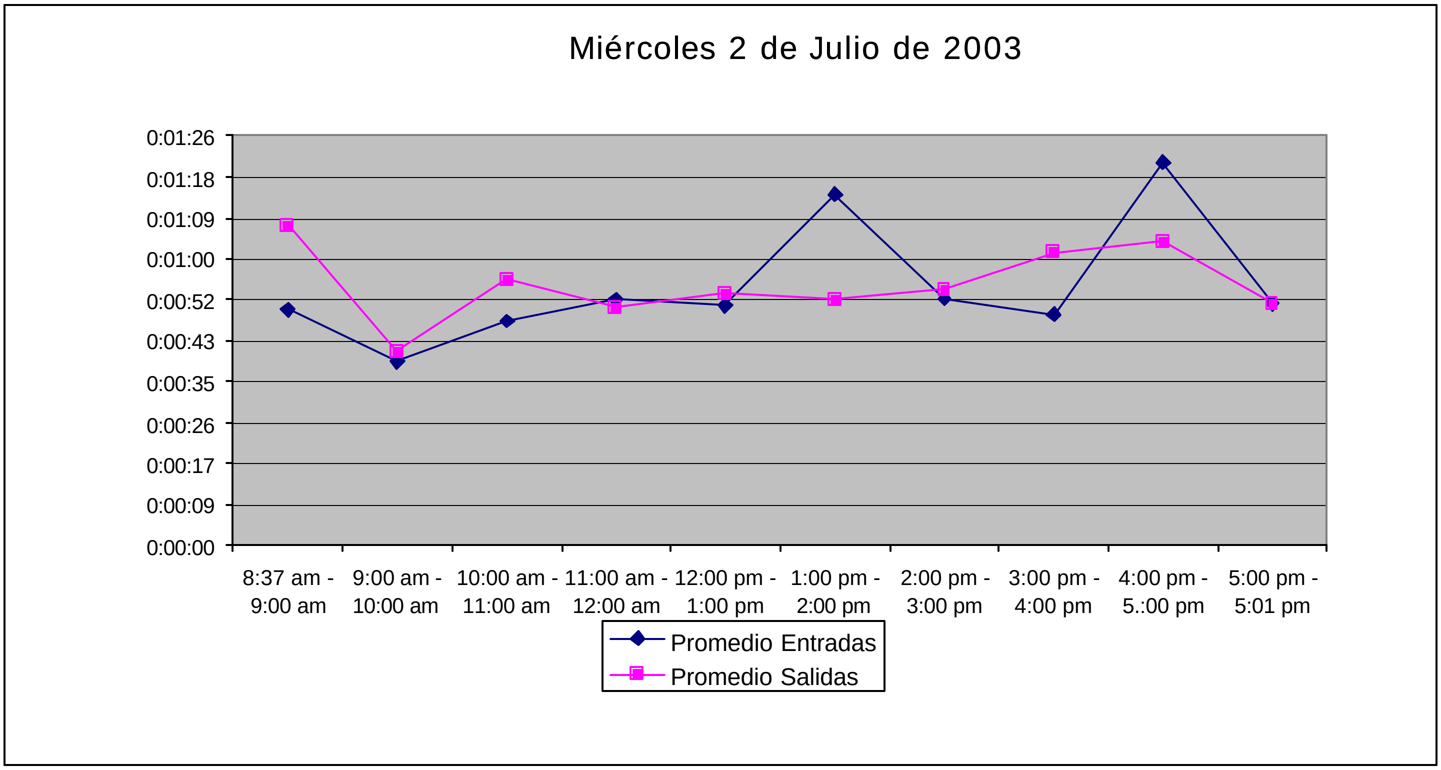
Martes 1 de Julio de 2003:

HORA	Promedio Entradas	Promedio Salidas
08:42 am - 09:00 am	0:00:32	0:00:44
09:00 am - 10:00 am	0:00:38	0:00:54
10:00 am - 11:00 am	0:00:58	0:01:12
11:00 am - 12:00 am	0:01:21	0:01:08
12:00 pm - 01:00 pm	0:01:02	0:01:04
01:00 pm - 02:00 pm	0:01:08	0:00:51
02:00 pm - 03:00 pm	0:00:53	0:00:52
03:00 pm - 04:00 pm	0:00:46	0:00:48
04:00 pm - 04:55 pm	0:01:15	0:01:00



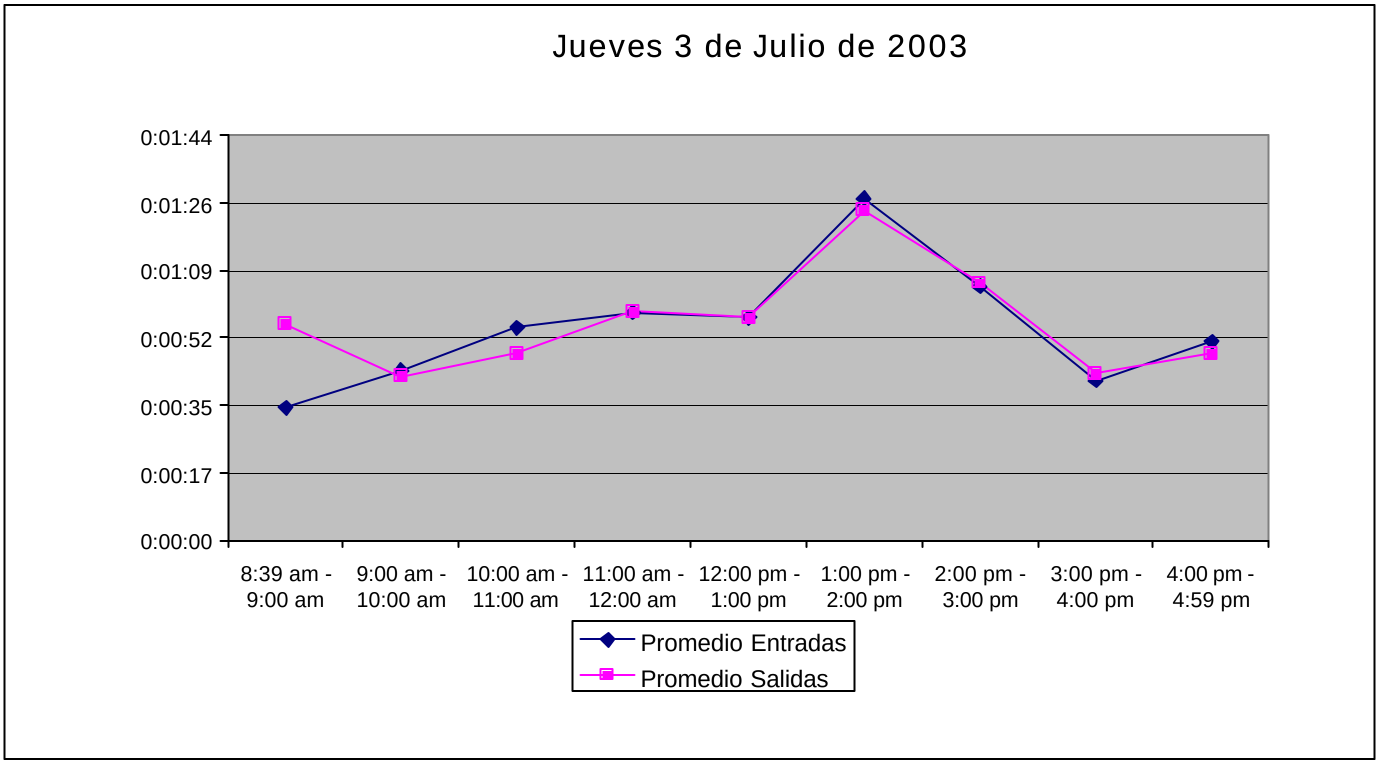
Miércoles 2 de Julio de 2003:

HORA	Promedio Entradas	Promedio Salidas
08:37 am - 09:00 am	0:00:50	0:01:07
09:00 am - 10:00 am	0:00:39	0:00:41
10:00 am - 11:00 am	0:00:47	0:00:56
11:00 am - 12:00 am	0:00:52	0:00:50
12:00 pm - 01:00 pm	0:00:51	0:00:53
01:00 pm - 02:00 pm	0:01:14	0:00:52
02:00 pm - 03:00 pm	0:00:52	0:00:54
03:00 pm - 04:00 pm	0:00:49	0:01:02
04:00 pm - 05:00 pm	0:01:21	0:01:04
05:00 pm - 05:01 pm	0:00:51	0:00:51



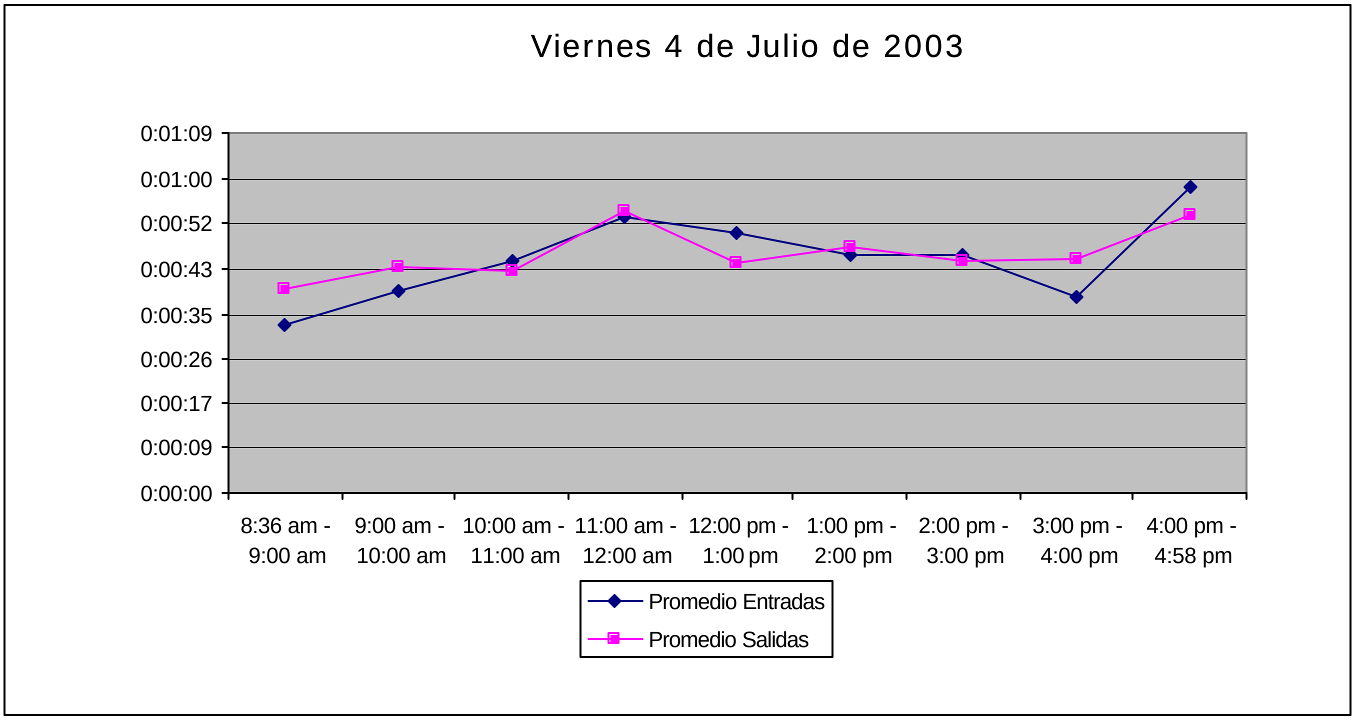
Para el día 3 de Julio de 2003:

HORA	Promedio Entradas	Promedio Salidas
08:39 am - 09:00 am	0:00:34	0:00:55
09:00 am - 10:00 am	0:00:43	0:00:42
10:00 am - 11:00 am	0:00:54	0:00:48
11:00 am - 12:00 am	0:00:58	0:00:59
12:00 pm - 01:00 pm	0:00:57	0:00:57
01:00 pm - 02:00 pm	0:01:27	0:01:24
02:00 pm - 03:00 pm	0:01:05	0:01:06
03:00 pm - 04:00 pm	0:00:41	0:00:43
04:00 pm - 04:59 pm	0:00:51	0:00:48



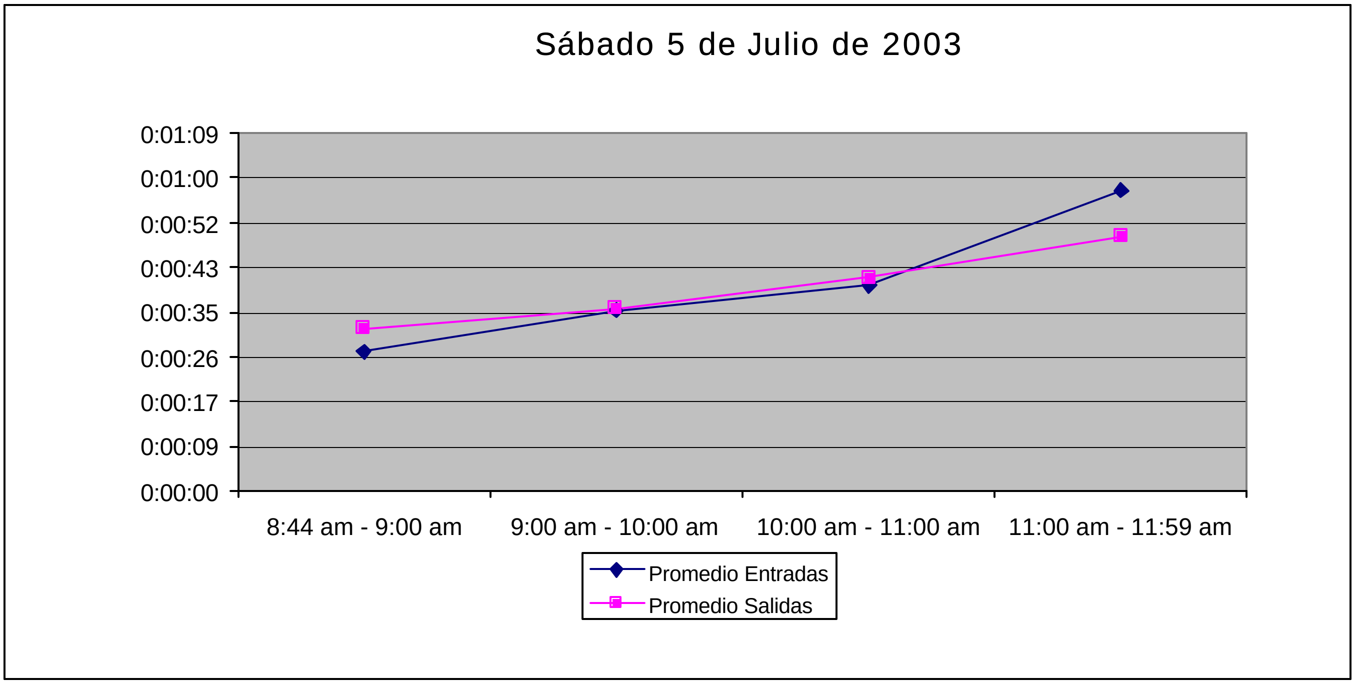
Día 4 de Julio de 2003:

HORA	Promedio Entradas	Promedio Salidas
08:36 am - 09:00 am	0:00:32	0:00:39
09:00 am - 10:00 am	0:00:39	0:00:44
10:00 am - 11:00 am	0:00:45	0:00:43
11:00 am - 12:00 am	0:00:53	0:00:54
12:00 pm - 01:00 pm	0:00:50	0:00:44
01:00 pm - 02:00 pm	0:00:46	0:00:47
02:00 pm - 03:00 pm	0:00:46	0:00:45
03:00 pm - 04:00 pm	0:00:38	0:00:45
04:00 pm - 05:00 pm	0:00:59	0:00:54



Para el día 5 de Julio de 2003:

HORA	Promedio Entradas	Promedio Salidas
08:44 am - 09:00 am	0:00:27	0:00:31
09:00 am - 10:00 am	0:00:35	0:00:35
10:00 am - 11:00 am	0:00:40	0:00:41
11:00 am - 11:59 am	0:00:58	0:00:49


Sábado 5 de Julio de 2003
0:01:09
0:01:00
0:00:52
0:00:43
0:00:35
0:00:26
0:00:17
0:00:09
0:00:00
8:44 am - 9:00 am
9:00 am - 10:00 am
10:00 am - 11:00 am
11:00 am - 11:59 am
Promedio Entradas
Promedio Salidas

TIEMPOS PROMEDIOS POR TRANSACCIÓN:

Al analizar la información con la finalidad de determinar cual es el factor o parámetro que rige o controla el movimiento del sistema, es decir el factor que determina que tan rápido o que tan lento avanza la cola, es la rapidez con la que los cajeros le dan atención a las personas. Es por esto que se ha realizado las siguientes tablas con los valores promedio de cada transacción para cada cajero y todo esto realizado para cada día.

Para la Caja 3:

#	Transacción	30 de Junio	1 de Julio	2 de Julio	3 de Julio	4 de Julio	5 de Julio
1	Retiro de Cuenta de Ahorro	00:02:45	00:02:33	00:02:40	00:02:32	00:02:30	00:02:25
2	Depósito Cuenta de Ahorro	00:01:15	00:02:41	00:02:00	00:02:12	00:01:49	00:02:20
3	Pago de Cheques	00:03:04	00:02:45	00:03:07	00:02:23	00:02:21	00:02:11
4	Depósito Cuenta Corriente	00:02:37	00:02:39	00:04:19	00:02:21	00:03:14	
5	Pago de Colectores	00:01:53	00:04:51	00:01:44	00:01:00	00:01:15	00:01:12
6	Pago de Colegiaturas	00:01:47	00:01:41	00:02:57	00:01:33	00:01:33	00:02:13
7	Pago de Remesas Familiares	00:03:22	00:02:41	00:03:41	00:03:28	00:03:12	00:02:03
8	Apertura de Cuenta de Ahorro						
9	Abono a Préstamos	00:02:01	00:00:21	00:01:42	00:02:40	00:01:10	00:01:04
10	Abono a Tarjeta de Crédito	00:01:45	00:03:26	00:02:07	00:02:00	00:01:52	
11	Devolución de la Renta	00:01:41	00:02:15	00:02:48	00:03:30	00:02:21	00:02:21
12	Cambio de Moneda	00:01:45	00:00:31	00:01:12	00:00:52	00:00:38	00:00:57
13	Pago de Subsidio ISSS	00:02:54		00:02:20	00:02:13	00:02:34	00:02:22
14	Actualización de Libreta	00:01:13	00:00:34	00:01:00	00:00:54	00:02:05	

Para explicar de una mejor manera los datos expuestos en al tabla anterior tomaremos por ejemplo: la columna del 30 de Junio, representa los tiempos promedios que se demora éste cajero por cada transacción especificada. Es decir para realizar la transacción de retiro de efectivo de cuenta de ahorro, se demoró en promedio ese día por dicha transacción 2mimutos con 45 segundos.

Para la Caja 4:

#	Transacción	30 de Junio	1 de Julio	2 de Julio	3 de Julio	4 de Julio	5 de Julio
1	Retiro de Cuenta de Ahorro	00:02:18	00:02:30	00:02:20	00:02:38	00:02:43	00:02:19
2	Depósito Cuenta de Ahorro	00:01:50	00:02:17	00:01:39	00:01:36	00:01:59	00:01:41
3	Pago de Cheques	00:02:29	00:02:25	00:02:42	00:02:25	00:02:29	00:02:05
4	Depósito Cuenta Corriente	00:05:31	00:02:02	00:02:13	00:02:16	00:03:18	00:01:42
5	Pago de Colectores	00:01:02	00:01:22	00:01:52	00:01:47	00:01:53	00:01:00
6	Pago de Colegiaturas	00:00:41	00:01:34	00:02:17	00:02:20	00:02:01	00:01:04
7	Pago de Remesas Familiares	00:03:13	00:03:10	00:02:23	00:03:04	00:03:33	00:01:59
8	Apertura de Cuenta de Ahorro				00:01:06		00:01:19
9	Abono a Préstamos	00:01:26	00:02:18		00:02:16	00:03:35	00:02:07
10	Abono a Tarjeta de Crédito	00:01:26	00:01:23	00:04:38		00:01:32	00:01:00
11	Devolución de la Renta	00:03:07	00:02:09	00:02:14	00:02:28	00:02:17	00:02:47
12	Cambio de Moneda	00:02:51	00:01:34	00:01:11	00:01:01	00:01:21	00:01:55
13	Pago de Subsidio ISSS	00:02:04	00:04:03	00:03:45		00:02:25	00:03:32
14	Actualización de Libreta		00:01:50		00:00:30	00:00:37	00:00:29

Para la Caja 5:

#	Transacción	30 de Junio	1 de Julio	2 de Julio	3 de Julio	4 de Julio	5 de Julio
1	Retiro de Cuenta de Ahorro	00:03:48	00:03:02	00:02:56	00:02:49	00:02:53	00:04:03
2	Depósito Cuenta de Ahorro	00:02:37	00:01:30	00:02:24	00:01:42	00:01:42	00:05:00
3	Pago de Cheques	00:03:13	00:03:33	00:02:52	00:03:49	00:03:13	00:02:22
4	Depósito Cuenta Corriente	00:05:47	00:02:25	00:03:07	00:07:29	00:03:23	00:03:26
5	Pago de Colectores	00:01:14	00:03:15	00:01:05	00:00:52	00:02:09	00:01:10
6	Pago de Colegiaturas	00:01:31	00:01:17	00:02:54	00:00:40	00:01:37	00:02:23
7	Pago de Remesas Familiares		00:03:20	00:03:56	00:05:33	00:04:40	
8	Apertura de Cuenta de Ahorro		00:05:25		00:01:00		
9	Abono a Préstamos	00:02:30	00:03:04	00:02:09		00:01:28	00:02:38
10	Abono a Tarjeta de Crédito		00:01:20	00:03:15	00:05:58	00:02:13	00:01:24
11	Devolución de la Renta	00:04:03	00:04:26	00:03:02	00:02:52	00:03:52	00:02:59
12	Cambio de Moneda	00:01:27	00:00:44	00:03:12		00:01:11	00:00:59
13	Pago de Subsidio ISSS		00:03:54		00:01:35	00:03:25	
14	Actualización de Libreta		00:00:29	00:00:48		00:01:19	

Para la Caja 6:

#	Transacción	30 de Junio	1 de Julio	2 de Julio	3 de Julio	4 de Julio	5 de Julio
1	Retiro de Cuenta de Ahorro	00:03:03	00:02:07	00:02:20	00:01:51	00:02:17	00:02:12
2	Depósito Cuenta de Ahorro	00:09:54	00:01:51	00:01:55	00:01:39	00:01:52	00:02:26
3	Pago de Cheques	00:03:22	00:03:09	00:02:50	00:02:28	00:02:49	00:02:03
4	Depósito Cuenta Corriente	00:04:54	00:01:56	00:02:45	00:03:07	00:02:37	00:03:01
5	Pago de Colectores	00:03:10	00:01:47	00:01:20	00:01:11	00:01:16	00:02:36
6	Pago de Colegiaturas	00:02:10	00:01:45	00:01:51	00:02:03	00:02:29	
7	Pago de Remesas Familiares	00:01:18	00:03:32	00:03:12	00:03:15	00:02:58	
8	Apertura de Cuenta de Ahorro		00:01:39	00:02:44		00:01:15	
9	Abono a Préstamos	00:02:35	00:02:03	00:01:38	00:02:28	00:01:59	00:01:55
10	Abono a Tarjeta de Crédito		00:01:22	00:01:47	00:01:06	00:01:34	00:05:31
11	Devolución de la Renta	00:02:07	00:02:50	00:02:09	00:02:11	00:02:19	00:01:54
12	Cambio de Moneda	00:00:38	00:00:54	00:01:49	00:01:08	00:01:05	00:01:14
13	Pago de Subsidio ISSS		00:02:36	00:04:20	00:02:56	00:01:56	
14	Actualización de Libreta		00:01:20	00:03:14	00:00:30	00:00:24	00:01:31

Para la Caja 7:

#	Transacción	30 de Junio	1 de Julio	2 de Julio	3 de Julio	4 de Julio	5 de Julio
1	Retiro de Cuenta de Ahorro	00:01:33			00:02:56		
2	Depósito Cuenta de Ahorro						
3	Pago de Cheques	00:02:35					
4	Depósito Cuenta Corriente	00:04:06			00:03:35		
5	Pago de Colectores	00:03:20			00:04:45		
6	Pago de Colegiaturas	00:02:49					
7	Pago de Remesas Familiares	00:03:26					
8	Apertura de Cuenta de Ahorro				00:01:41		
9	Abono a Préstamos				00:02:12		
10	Abono a Tarjeta de Crédito						
11	Devolución de la Renta	00:02:51			00:02:05		
12	Cambio de Moneda				00:03:20		
13	Pago de Subsidio ISSS						
14	Actualización de Libreta	00:06:16			00:01:50		

Para la Caja 8:

#	Transacción	30 de Junio	1 de Julio	2 de Julio	3 de Julio	4 de Julio	5 de Julio
1	Retiro de Cuenta de Ahorro	00:00:00	00:00:00	00:02:29	00:02:21	00:01:55	00:02:44
2	Depósito Cuenta de Ahorro		00:01:50	00:01:28	00:03:17	00:02:52	00:01:15
3	Pago de Cheques	00:00:00	00:02:02	00:02:33	00:03:21	00:02:05	00:01:12
4	Depósito Cuenta Corriente		00:01:55	00:01:06			
5	Pago de Colectores	00:00:00	00:00:39	00:01:06	00:02:46	00:01:50	00:02:00
6	Pago de Colegiaturas	00:00:00	00:02:00	00:01:19	00:01:09	00:01:12	00:01:16
7	Pago de Remesas Familiares	00:00:00	00:02:48			00:03:17	
8	Apertura de Cuenta de Ahorro						00:02:56
9	Abono a Préstamos	00:00:00		00:02:22	00:02:14	00:01:44	00:02:14
10	Abono a Tarjeta de Crédito		00:01:23	00:01:27	00:01:06	00:02:44	
11	Devolución de la Renta		00:01:47	00:01:36		00:02:04	00:05:14
12	Cambio de Moneda	00:00:00	00:00:47	00:01:47	00:02:46	00:00:42	00:01:17
13	Pago de Subsidio ISSS		00:01:55			00:03:48	
14	Actualización de Libreta	00:00:00	00:00:38	00:01:15	00:01:39	00:01:58	00:00:59

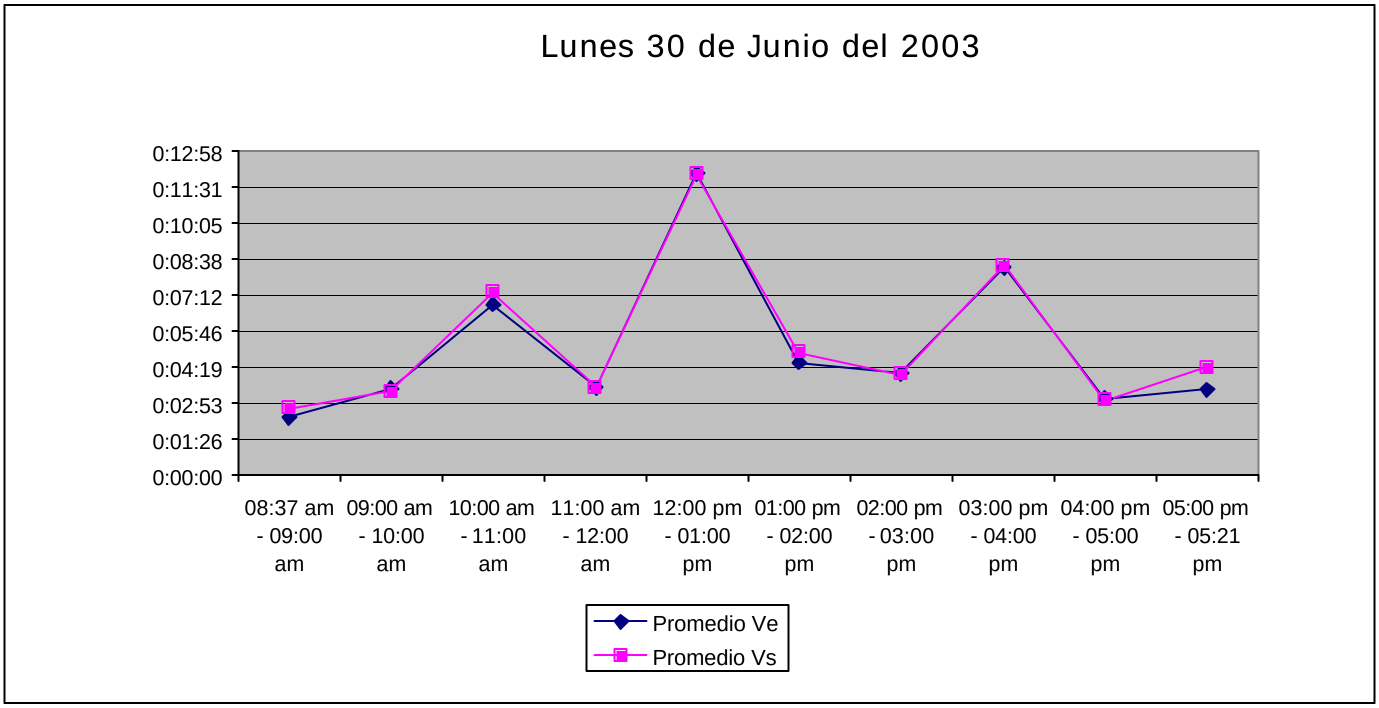
PROMEDIO DE VELOCIDADES DE ENTRADA Y SALIDA DE LOS CLIENTES PARA RECIBIR ATENCIÓN

Los promedios de las velocidades de entrada y salida de los clientes para recibir atención, es importantes dentro del presente estudio, puesto que representa la velocidad promedio en que las personas salen de la cola para dirigirse hacia cualquiera de los cajeros que en ese momento se encuentren en disposición de otorgar el servicio, así como también se presenta la velocidad con la que las personas salen del área de servicio. Convirtiéndose así, esta información, en uno de los parámetros más importantes para observar el movimiento del sistema como conjunto (Cola- Servidores). A continuación se presenta un informe detallado para cada uno de los días

Día 30 de Junio de 2003:

ATENCION DE CAJEROS JUNIO 30 Promedio de Velocidades de entrada y salida		
HORA	**Promedio Ve**	**Promedio Vs**
08:37 am - 09:00 am	0:02:18	0:02:40
09:00 am - 10:00 am	0:03:29	0:03:22
10:00 am - 11:00 am	0:06:50	0:07:21
11:00 am - 12:00 am	0:03:31	0:03:32
12:00 pm - 01:00 pm	0:12:06	0:12:02
01:00 pm - 02:00 pm	0:04:32	0:04:56
02:00 pm - 03:00 pm	0:04:05	0:04:03
03:00 pm - 04:00 pm	0:08:19	0:08:25
04:00 pm - 05:00 pm	0:03:06	0:02:59
05:00 pm - 05:21 pm	0:03:27	0:04:19

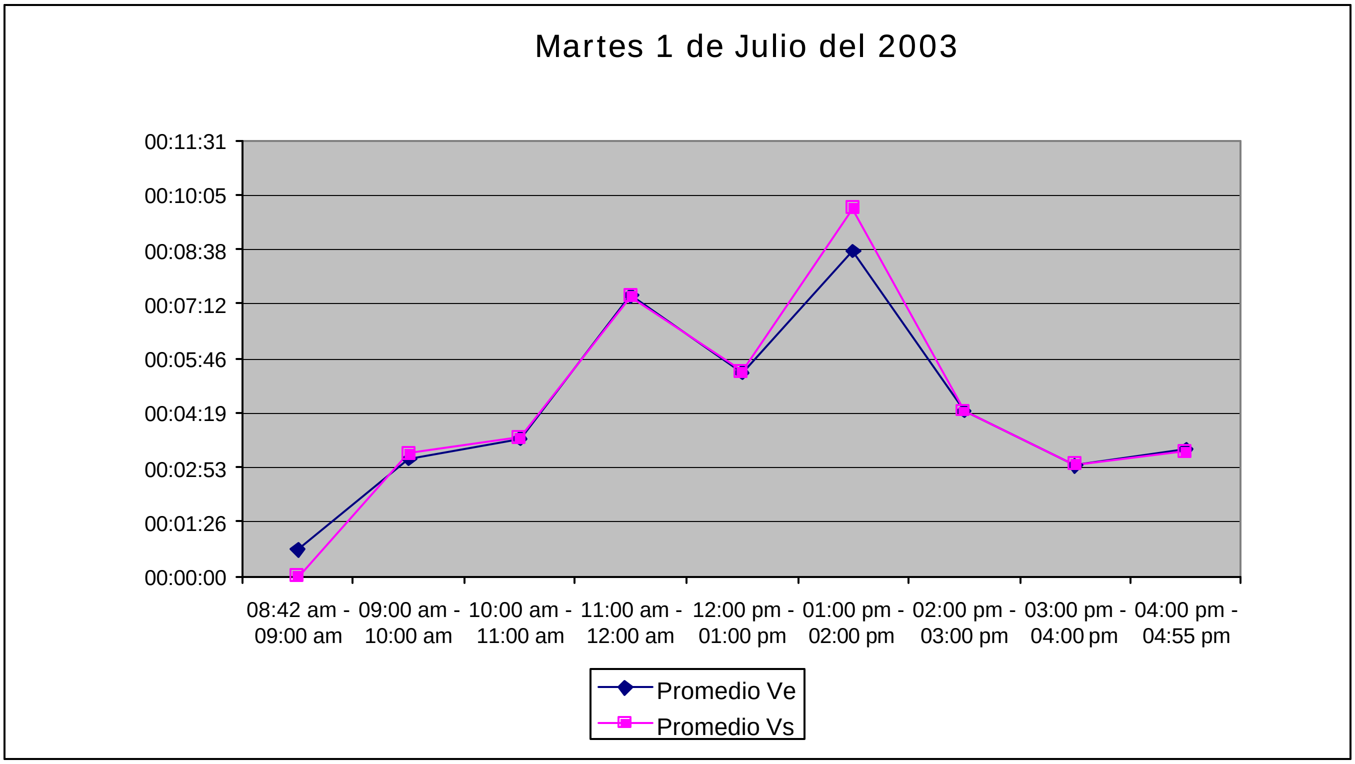
En la tabla anterior se puede observar lo antes expuesto así: si tomamos la hora de las 9:00 a 10:00am podemos ver que en ese intervalo de tiempo, cada 3 minutos con 29 segundos una persona pasa a ser atendida y cada 3 minutos con 22 segundos una persona sale del área de servicio luego de realizar su(s) transacción(es).
Y gráficamente se representan estos valores así:



Día 1 de Julio de 2003:

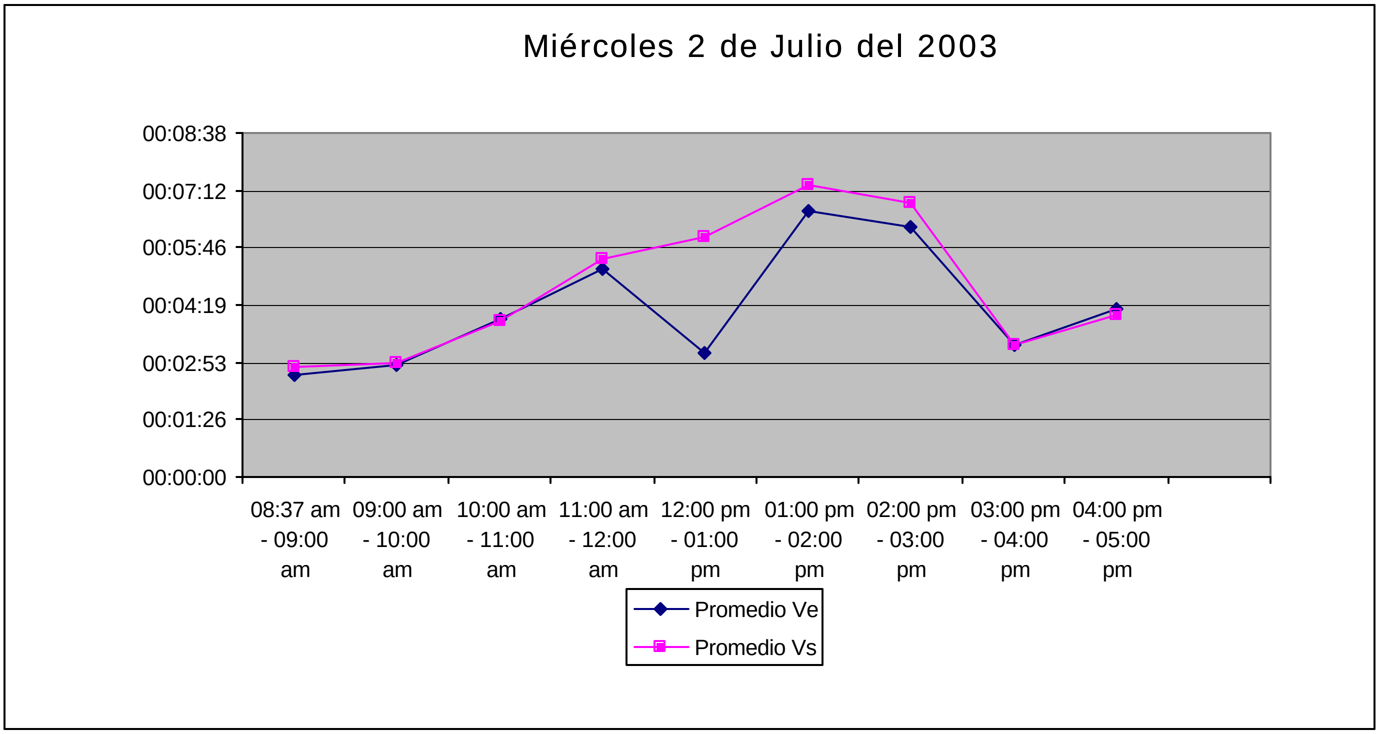
ATENCION DE CAJEROS JULIO 1 Promedio de Velocidades de entrada y salida		
HORA	**Promedio Ve**	**Promedio Vs**
08:42 am - 09:00 am	0:00:43	0:00:00
09:00 am - 10:00 am	0:03:06	0:03:15
10:00 am - 11:00 am	0:03:38	0:03:40
11:00 am - 12:00 am	0:07:24	0:07:23
12:00 pm - 01:00 pm	0:05:23	0:05:24
01:00 pm - 02:00 pm	0:08:35	0:09:43
02:00 pm - 03:00 pm	0:04:22	0:04:22
03:00 pm - 04:00 pm	0:02:55	0:02:58
04:00 pm - 04:55 pm	0:03:22	0:03:18

Los datos anteriores se presentan en forma gráfica así:



Día 2 de Julio de 2003:

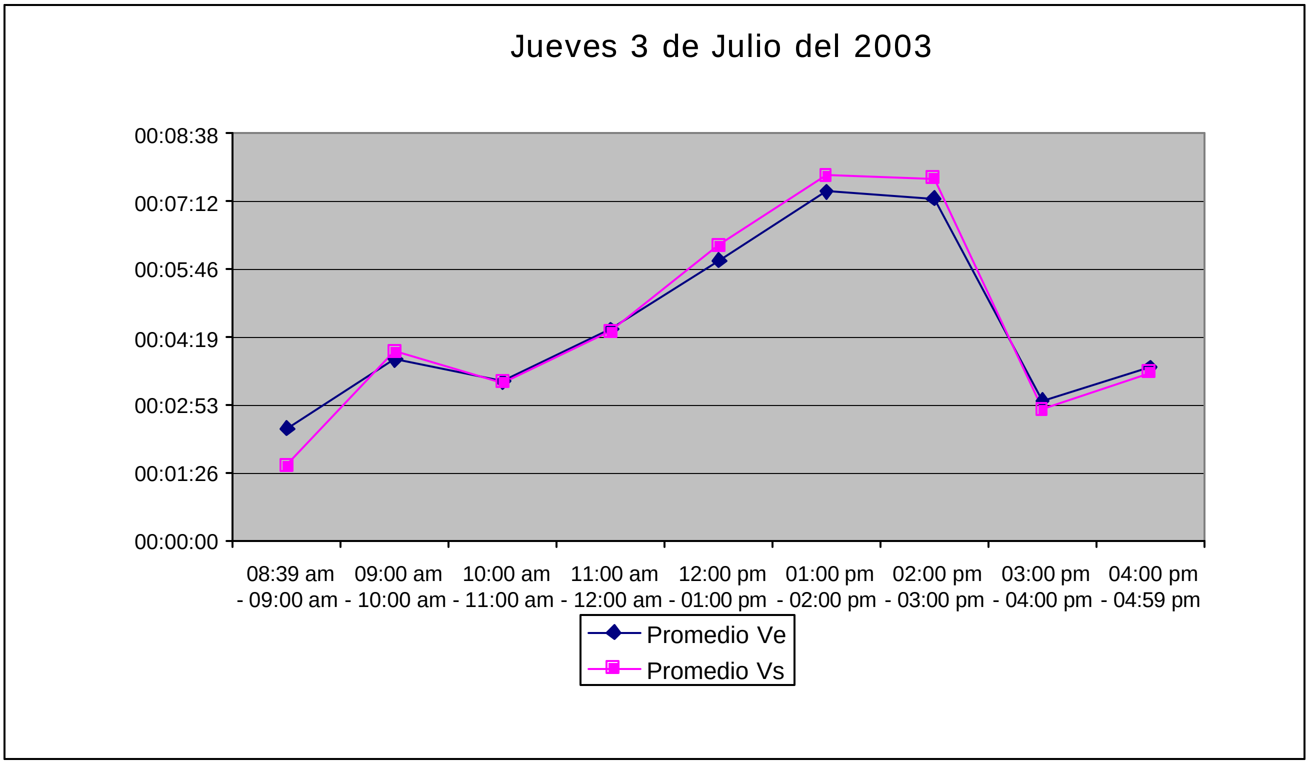
ATENCION DE CAJEROS JULIO 2 Promedio de Velocidades de entrada y salida		
HORA	**Promedio Ve**	**Promedio Vs**
08:37 am - 09:00 am	0:02:33	0:02:46
09:00 am - 10:00 am	0:02:48	0:02:51
10:00 am - 11:00 am	0:03:58	0:03:54
11:00 am - 12:00 am	0:05:12	0:05:28
12:00 pm - 01:00 pm	0:03:07	0:06:00
01:00 pm - 02:00 pm	0:06:41	0:07:19
02:00 pm - 03:00 pm	0:06:17	0:06:52
03:00 pm - 04:00 pm	0:03:18	0:03:19
04:00 pm - 05:00 pm	0:04:12	0:04:04



Día 3 de Julio de 2003:

ATENCION DE CAJEROS JULIO 3 Promedio de Velocidades de entrada y salida		
HORA	**Promedio Ve**	**Promedio Vs**
08:39 am - 09:00 am	0:02:23	0:01:34
09:00 am - 10:00 am	0:03:51	0:04:00
10:00 am - 11:00 am	0:03:22	0:03:21
11:00 am - 12:00 am	0:04:28	0:04:26
12:00 pm - 01:00 pm	0:05:57	0:06:16
01:00 pm - 02:00 pm	0:07:25	0:07:44
02:00 pm - 03:00 pm	0:07:15	0:07:41
03:00 pm - 04:00 pm	0:02:58	0:02:47
04:00 pm - 04:59 pm	0:03:40	0:03:33

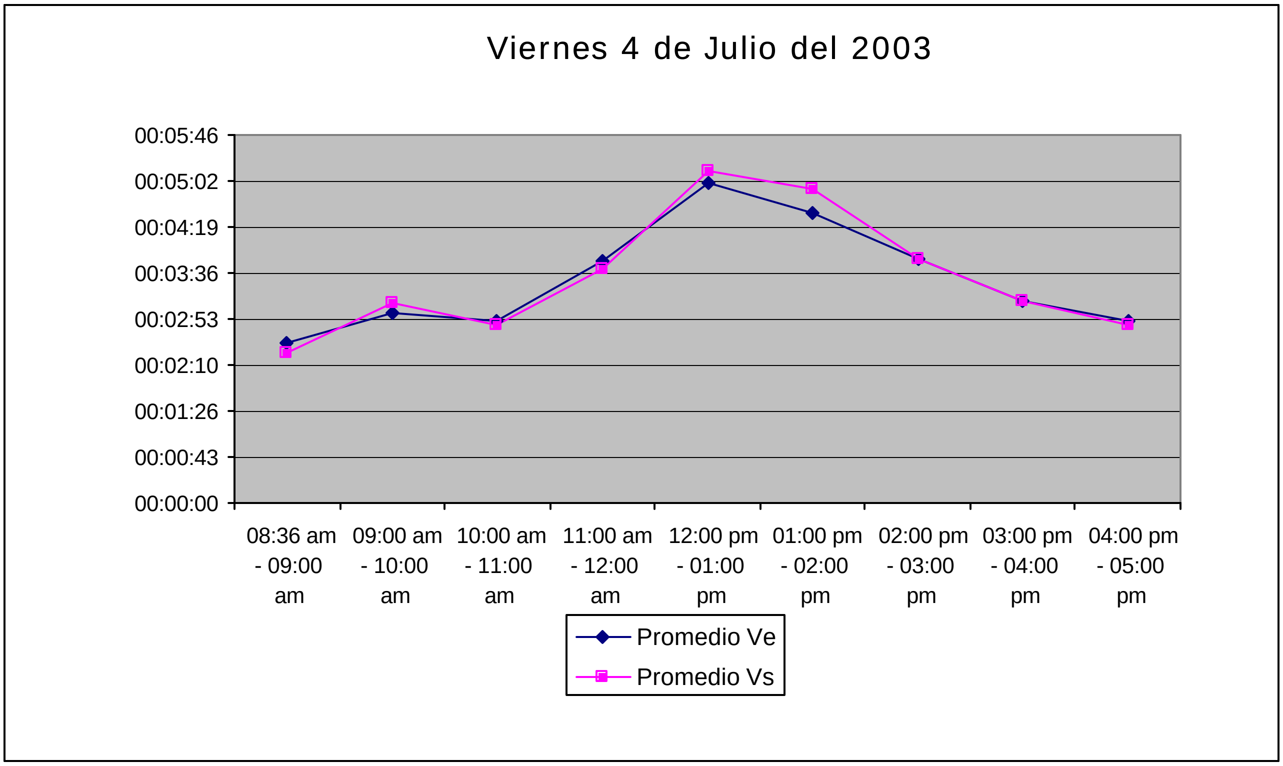
Y en forma gráfica:



Día 4 de Julio de 2003:

ATENCION DE CAJEROS JULIO 4 Promedio de Velocidades de entrada y salida		
HORA	**Promedio Ve**	**Promedio Vs**
08:36 am - 09:00 am	0:02:31	0:02:20
09:00 am - 10:00 am	0:02:59	0:03:07
10:00 am - 11:00 am	0:02:52	0:02:47
11:00 am - 12:00 am	0:03:47	0:03:41
12:00 pm - 01:00 pm	0:05:00	0:05:11
01:00 pm - 02:00 pm	0:04:32	0:04:55
02:00 pm - 03:00 pm	0:03:50	0:03:49
03:00 pm - 04:00 pm	0:03:09	0:03:10
04:00 pm - 05:00 pm	0:02:52	0:02:48

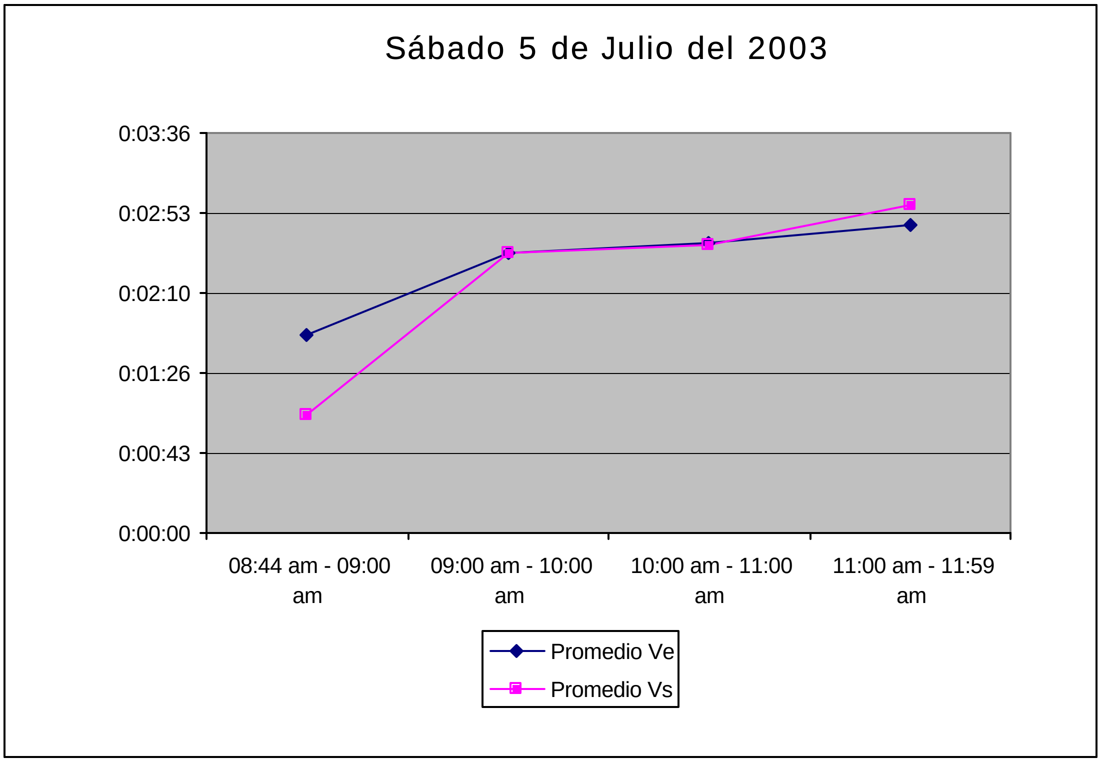
Y en forma gráfica:



Día 5 de Julio de 2003:

ATENCION DE CAJEROS JULIO 5		
Promedio de Velocidades de entrada y salida		
HORA	**Promedio Ve**	**Promedio Vs**
08:44 am - 09:00 am	0:01:47	0:01:04
09:00 am - 10:00 am	0:02:31	0:02:31
10:00 am - 11:00 am	0:02:36	0:02:36
11:00 am - 11:59 am	0:02:46	0:02:57

Y en forma gráfica:


Sábado 5 de Julio del 2003
0:03:36
0:02:53
0:02:10
0:01:26
0:00:43
0:00:00
08:44 am - 09:00 am
09:00 am - 10:00 am
10:00 am - 11:00 am
11:00 am - 11:59 am
Promedio Ve
Promedio Vs

ANÁLISIS POR TIPO Y CANTIDAD DE TRANSACCIONES

No.Trans	**Nombre Transacción**	**Promedios**	**TPromSegs**
1	Retiro Cuenta Ahorro	0:02:33	153
2	Deposito Cuenta Ahorro	0:02:23	143
3	Cheque Cuenta Corriente	0:02:36	156
4	Deposito Cuenta Corriente (Remesa)	0:03:12	192
5	Pago de Colectores	0:01:51	111
6	Pago de Colegiaturas	0:01:48	108
7	Pago de Remesas Familiares	0:03:12	192
8	Apertura de Cuentas	0:02:22	142
9	Abono a Prestamos	0:03:10	190
10	Abono a Tarjeta de Crédito	0:02:11	131
11	Devolución de Renta	0:02:39	159
12	Cambio de Moneda	0:01:24	84
13	Pago de subsidio (ISSS)	0:02:57	177
14	Actualización de Libreta de ahorro	0:01:24	84
	Promedio General	0:02:23	143

Trans.Cant	Prom
1	0:02:24
2	0:04:04
3	0:04:47
4	0:04:51